Affine Abbildungen

Achsenaffinitäten

Theorie und Rechenmethoden

Beispiele und Konstruktionen

Datei Nr. 21220

Stand 6. März 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Inhalt

1 Grundlagen aus 21201

1.1 Fixpunkte und Fixpunktgeraden

Affine Abbildungen können **Fixpunkte** haben, also Punkte, die mit ihrem Bildpunkt identisch sind.
Dazu gibt es genau vier Möglichkeiten:

1. Fall:	Die Abbildung hat keinen Fixpunkt.
2. Fall:	Die Abbildung hat genau einen Fixpunkt.
3. Fall:	Die Abbildung hat unendlich viele Fixpunkte, die auf einer Geraden liegen. Diese Gerade heißt dann **Affinitätsachse**. Dieser Fall ist Thema des Textes.
4. Fall:	Die Abbildung hat nur Fixpunkte. Dann liegt die identische Abbildung vor.

Für Fixpunkte gilt: $\vec{x}' = \vec{x}$ d. h. $\begin{Bmatrix} u_1 \cdot x + v_1 \cdot y + w_1 = x \\ u_2 \cdot x + v_2 \cdot y + w_2 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (u_1 - 1) \cdot x + v_1 \cdot y + w_1 = 0 \\ u_2 \cdot x + (v_2 - 1) \cdot y + w_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Das System kann zu drei verschiedene Ergebnissen führen:

1. Es gibt keine Lösung – also keinen Fixpunkt.
2. Es gibt eine eindeutige Lösung – also genau einen Fixpunkt.
3. Es gibt unendlich viele Lösungen – also unendlich viele Fixpunkte auf einer Geraden.

Über den 4. Fall reden wir nicht, denn die identische Abbildung, die nichts verändert, ist trivial.

Beispiele zur Fixpunktberechnung

B1 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' = 2x - 2y + 5 \\ y' = 2x - 3y + 1 \end{Bmatrix}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x - 2y + 5 = x \\ 2x - 3y + 1 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - 2y = -5 & (1) \\ 2x - 4y = -1 & (2) \end{Bmatrix}$

$2 \cdot (1) - (2)$: $0 = -9$

Dies ist ein Widerspruch (gegen die Annahme, dass es eine Lösung gibt).
Das System hat keine Lösung, also besitzt die Abbildung **keine Fixpunkte**.

B2 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' = x + y + 3 \\ y' = 2x - y - 4 \end{Bmatrix}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x + y + 3 = x \\ 2x - y - 4 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = -3 & (1) \\ 2x - 2y = 4 & (2) \end{Bmatrix}$

Aus (1) folgt: y = -3, in (2): $2x + 6 = 4 \Leftrightarrow x = -1$

Also hat diese affine Abbildung den Fixpunkt $F(-1 \mid -3)$:

B3 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = -2y \end{Bmatrix}$

Die Fixpunktbedingung $\vec{x}' = \vec{x}$ ergibt: $\begin{Bmatrix} x + y = x \\ -2y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ -3y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$ **y = 0**

Alle Punkte, die diese Bedingung erfüllen, sind Fixpunkte. Also ist die **x-Achse Affinitätsachse**.

Der Grund dafür ist der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Abbildungsgleichung.

Es gibt spezielle Achsenaffinitäten

(1) Alle affine Abbildungen mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\vec{x}$ also $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

mit $\vec{b} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben die **x-Achse als Fixpunktgerade** (Affinitätsachse).

Beweis: Bedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$, also $\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\vec{x} = \vec{x}$ d. h. $\begin{Bmatrix} x + b_1 y = x \\ b_2 y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} b_1 \cdot y = 0 & (1) \\ (b_2 - 1) \cdot y = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Ist $b_1 \neq 0 \Rightarrow$ aus(1): $\mathbf{y = 0}$

Ist aber $b_1 = 0$ und $b_2 \neq 1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 = 0 \\ \underbrace{(b_2 - 1)}_{\neq 0} \cdot y = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{y = 0}$

Ergebnis: Alle Punkte mit y = 0 sind Fixpunkte, also alle Punkte der x-Achse.

(2) Alle affine Abbildungen mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ also $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ haben die **y-Achse als Fixpunktgerade** (Affinitätsachse).

Beweis: Bedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$, also $\begin{Bmatrix} x \cdot a_1 = x \\ a_2 \cdot x + y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x(a_1 - 1) = 0 & (3) \\ a_2 x = 0 & (4) \end{Bmatrix}$

Ist $a_2 \neq 0$, dann folgt aus (4) $\mathbf{x = 0}$.

Ist aber $a_2 = 0$ und $a_1 \neq 1$, dann folgt aus (3) $\mathbf{x = 0}$.

Ergebnis: Alle Punkte mit x = 0 sind Fixpunkte, also alle Punkte der y-Achse.

1.2 Achsenaffinitäten besitzen eine Affinitätsrichtung

Bei einer Achsenaffinität hat der Vektor $\overrightarrow{PP'}$ (wenn P kein Fixpunkt ist) für alle Punkte P dieselbe Richtung, man nennt sie Affinitätsrichtung.

Der Ortsvektor eines Punktes P kann durch die Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

so dargestellt werden: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Den Bildvektor: $\vec{x}\,' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} + \vec{w}$.

Daraus errechnet man $\overrightarrow{PP'} = \vec{x}\,' - \vec{x} = \left(x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} + \vec{w}\right) - \left(x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = ...$

Drei Beispiele:

Zu B3 $\quad \vec{x}\,' = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}\,' = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x' = x + y\\ y' = -2y\end{Bmatrix}$

Die x-Achse ist Affinitätsachse (siehe Seite 4). Für die Affinitätsrichtung folgt:

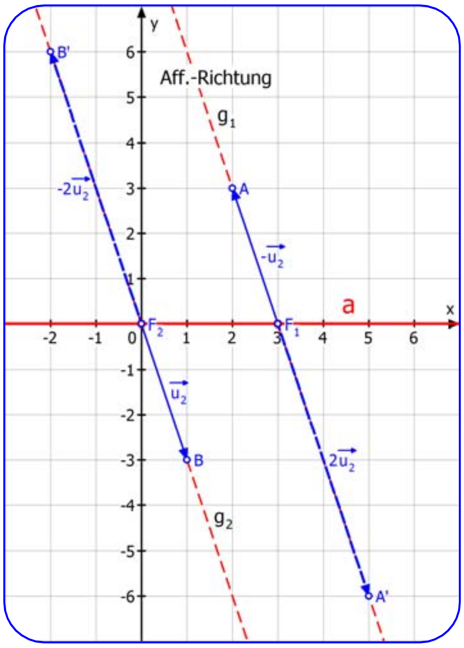
$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}\,' - \vec{x} = \cancel{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - \left(\cancel{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = y\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PP'} = y\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Liegt also P nicht auf der x-Achse, ist also $y \neq 0$, dann hat $\overrightarrow{PP'}$ stets die Richtung von $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Beispielpunkte: $A(2\,|\,3) \Rightarrow A'(5\,|-6)$, $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AA'} = \mathbf{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$B(1\,|-3) \Rightarrow B'(-2\,|\,6) \quad \overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$ oder $\overrightarrow{BB'} = \mathbf{-3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

Die Darstellung zeigt die x-Achse als Affinitätsachse sowie die Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ und $\overrightarrow{CC'}$.



Jede Gerade in Affinitätsrichtung ist eine Fixgerade.

Also y = -3x + c mit beliebigem c.

Zusätzlich ist die Achse Fixgerade, sogar Fixpunktgerade, weil sie nur aus Fixpunkten besteht.

Begründung Seite 7.

1.3 Eigenvektoren von Matrizen, Fixgeraden

Hier die in 62001 behandelten Grundlagen:

1. Eine affine Abbildung mit der Gleichung $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{w}$ bildet Punkte bzw. deren Ortsvektoren ab. Will man damit (Richtungs-)**Vektoren abbilden**, die also keine Ortsvektoren darstellen sollen, entfällt der Vektor $\vec{w}$: Es gilt also

   Die **affine Vektorabbildung** lautet also stets so: $\vec{u}' = A \cdot \vec{u}$

2. Wenn eine Gerade Fixgerade ist, dann muss der Bildvektor ihres Richtungsvektors dieselbe Richtung haben wie das Original, er muss also davon ein Vielfaches sein.

   Vektoren, für die gilt $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$, also $A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$, heißen **Eigenvektoren von A**.
   Die Zahl k heißt **Eigenwert** der Matrix A (bzw. der Abbildung).

3. **Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren:**

   Die Gleichung $A \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u}$ bedeutet ausführlich $\left\{ \begin{matrix} a_1 \cdot u_1 + b_1 \cdot u_2 = k \cdot u_1 \\ a_2 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 = k \cdot u_2 \end{matrix} \right\}$

   und führt auf das Eigenwertsystem $\left\{ \begin{matrix} (a_1 - k) \cdot u_1 + b_1 \cdot u_2 = 0 \\ a_2 \cdot u_1 + (b_2 - k) \cdot u_2 = 0 \end{matrix} \right\}$

   bzw. $\begin{pmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (*)

   Die Theorie über Gleichungssysteme besagt, dass es genau dann eine eindeutige Lösung gibt, wenn die zur linken Seite gehörende Determinante ungleich Null ist. Da hier die Absolutglieder 0 sind, folgt dann jedoch als Lösung NUR der Nullvektor. Da der Nullvektor nicht als Richtungsvektor möglich ist, muss man diesen als Lösung ausschließen. Also ***muss*** *diese Determinante den Wert NULL bekommen.*
   Dies ist die Bedingung für „nicht-triviale" Lösungen:

   Determinante = 0 d. h. $\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 \\ a_2 & b_2 - k \end{vmatrix} = 0$ **„Charakteristische Gleichung"**.

   Wenn hieraus Lösungen für k folgen (das sind dann die Eigenwerte), setzt man sie in die Gleichung (*) ein und erhält als Lösungsvektoren die gesuchten Eigenvektoren.
   Dabei wird immer eine Gleichung entbehrlich sein, sodass man für die Lösung eine der Variablen x oder y frei wählen kann. Der Eigenvektor ist daher immer nur bis auf Vielfache eindeutig bestimmt. Dies ist aber in Ordnung, denn es geht nur um seine Richtung, die Länge (Betrag) ist unerheblich.

4. Der **Nutzen der Eigenvektoren** liegt darin, dass eine **Fixgerade** nur die Richtung eines Eigenvektors haben kann. Zum Eigenwert 1 gehört stets eine Fixpunktgerade. Man hat hier also eine zweite Methode (neben der mit der Affinitätsrichtung) zur Bestimmung von Fixgeraden.

Drei Beispiele zur Bestimmung von Fixgeraden mittels Eigenvektoren

Zu $\boxed{B3}$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = -2y \end{Bmatrix}$ (Siehe Seite 3 und 5.)

1. Schritt: **Fixpunkte** Weil die erste Matrixspalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lautet, ist die x-Achse Fixpunktgerade,

2. Schritt: **Berechnung der Eigenvektoren** aus: $\begin{pmatrix} 1-k & 1 \\ 0 & -2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bedingung für nicht-triviale Lösungen ist die charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 0 & -2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k) \cdot (-2-k) = 0 \quad \text{mit } k_1 = 1, \ k_2 = -2 \quad \text{(Eigenwerte)}$$

Eigenvektoren zu $k_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ 0 & -2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_2 = 0 \\ -3u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Hieraus folgt $u_2 = 0$. Da für u_1 keine Bedingung vorhanden ist, kann man u_1 frei wählen:

Wähle $u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$. Eigenvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für diese Eigenvektoren gilt: $\vec{u}' = \boxed{1} \cdot \vec{u}$ (1 war der Eigenwert.)

Eigenvektoren zu $k_2 = -2$: $\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 0 & -2+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3u_1 + u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix}$

Da die 2. Gleichung keine Bedingung darstellt, kann man eine der Unbekannten frei wählen. Wähle $u_1 = r, \ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -3r$. $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ -3r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = \boxed{-2} \cdot \vec{v}$ (-2 war der Eigenwert).

Ergebnis: Die Abbildung besitzt also die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = -2 \cdot \vec{v}$, sowie deren Vielfachen.

3. Schritt: **Bestimmung der Fixgeraden:**

Die x-Achse ist **Fixpunktgerade** in Richtung des Eigenvektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ferner sind alle Geraden durch einen Fixpunkt in Richtung eines Eigenvektors **Fixgeraden**.

Also in Richtung des Eigenvektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ lauten die Fixgeraden

$\vec{x} = \vec{x}_1 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ bzw. $y = -3x + c$ für beliebige $\vec{x}_1$ bzw. c.

Die Richtung des Eigenvektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist die Affinitätsrichtung.

Wenn man daher bei einer Achsenaffinität die Achse und die Affinitätsrichtung $\overrightarrow{PP'}$ kennt, dann kennt man auch schon die Fixgeraden.

2 Klassifizierung aller Typen von Achsenaffinitäten.

Wenn eine affine Abbildung eine Fixpunktgerade (Achse) besitzt, bestimmt man die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. An Hand dieser Eigenwerte kann man den Typ der Abbildung erkennen. Hier alle Möglichkeiten. Ich verwende für diese Einteilung Abbildungen, welche die x-Achse als Fixpunktgerade haben. Die Ergebnisse lassen sich auf alle anderen Achsenaffinitäten übertragen, denn bei der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften (und um die geht es jetzt) darf die Lage des Koordinatensystem keinen Einfluss haben.

Abbildungen, welche die x-Achse als Fixpunktgerade haben, haben so eine Abbildungsgleichung:

$\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ oder in Matrixform $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix}1 & b_1\\0 & b_2\end{pmatrix}\vec{x}$ mit $b_2 \neq 0$!! (Seite 4.)

Das **Eigenwertsystem** ist dann: $\begin{pmatrix}1-k & b_1\\0 & b_2-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \vec{o}$ (EWS)

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix}1-k & b_1\\0 & b_2-k\end{vmatrix} = 0$ d. h. $(1-k)(b_2-k) = 0$

Mögliche Eigenwerte sind also $k_1 = 1$ und $k_2 = b_2$.

Eigenvektoren zu k_1 = 1: Aus (EWS) folgt

$$\begin{pmatrix}1-1 & b_1\\0 & b_2-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} b_1u_2 = 0\\ (b_2-1)u_2 = 0\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

1. Fall: $b_1 \neq 0$. Dann folgt aus (1): $u_2 = 0$. Dann folgt aus (2): "$0 = 0$"
Also liegt für u_1 kein Bedingung vor: $u_1 = r \in \mathbb{R}$.
Die Eigenvektoren sind dann $\vec{u} = \begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

mit der Eigenschaft $\vec{u}\,' = \vec{u}$ (Fixvektor). Der gehört immer zur Achse !!!

2. Fall Wenn $b_1 = 0$ ist, dann heißt (1): $0 = 0$ und stellt keine Bedingung dar.
Dann folgt aber aus (2) $u_2 = 0$ und man erhält dieselbe Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $k_1 = b_2$: Aus (EWS) folgt

$$\begin{pmatrix}1-b_2 & b_1\\0 & b_2-b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}(1-b_2)u_1 + b_1u_2 = 0\\ 0 = 0\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Man kann z. B. $u_1 = rb_1$ wählen, $r \in \mathbb{R}$, dann folgt:: $(1-b_2)\cdot rb_1 + b_1 \cdot u_2 = 0 \quad |:b_1$

$(1-b_2)\cdot r + \cdot u_2 = 0$

ergibt: $u_2 = -r\cdot(1-b_2) = r\cdot(b_2-1)$

Eigenvektor ist also $\vec{v} = \begin{pmatrix}r\cdot b_1\\r\cdot(b_2-1)\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2-1\end{pmatrix}$. mi $\vec{v}\,' = b_2\vec{v}$

(b) Kürzere Variante (für Achsenaffinitäten):

Berechnung des zweiten Eigenvektors über die „Affinitätsrichtung“

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}\,' - \vec{x} = x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} - \left[x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = y\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2-1\end{pmatrix}$$

Wie kann man diese Ergebnisse veranschaulichen?

Wir gehen also davon aus, dass unsere affine Abbildung α die x-Achse als Achsenaffinität hat.

Dann ist klar, dass $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Fixvektor ist, er hat den Eigenwert 1.

Für den zweien Eigenwert gibt es nun unterschiedliche Möglichkeiten. Laut allgemeiner Berechnung gilt den zweiten Eigenvektor, dass er ein Vielfaches von $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix}$ ist mit $k = b_2$

1. Möglichkeit: Zweiter Eigenwert $k_2 = b_2 = 1$.

Dann hat die Abbildung nur einen (doppelten) Eigenwert, nämlich 1.

Und der zweite Eigenvektor ist $\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Er hat dann natürlich dieselbe Richtung wie $\vec{u}$.

Die Abbildungsrichtung ist dann natürlich parallel zur Achse (x-Achse).

Zahlenbeispiel: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$. Das bedeutet: $\left\{ \begin{matrix} x' = x + 2y \\ y' = y \end{matrix} \right\}$

Wegen $y' = y$ liegt der Bildpunkt auf einer Parallelen zur x-Achse, was uns ja auch schon der 2. Eigenvektor $\vec{v} = \vec{u} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sagte.

Verändert wird also nur die x-Koordinate, aber wie?

Zur x-Koordinate wird stets das Doppelte der y-Koordinate addiert.

das heißt, je weiter ein Punkt von der Achse entfernt ist, desto weiter wird er geschert,

d. h. je länger wird sein Abbildungspfeil.

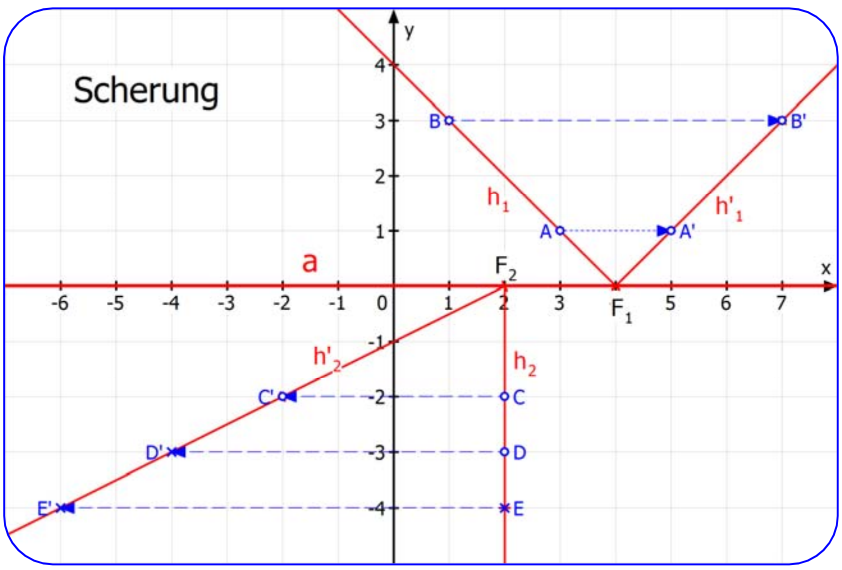
Punkt und Bildpunkt liegen stets auf einer Parallelen zur Achse.

Also ist jede Parallele zur Achse eine Fixgerade. (Sie hat die Richtung des Eigenvektors.)

und die schrägen Geraden h_1 und h_2 schneiden die Achse in einem Fixpunkt.

Kennt man von einem Punkt einer solchen Geraden den Bildpunkt, kann man die Bildgerade angeben.

α ist eine Scherung, weil es eine Achse gibt und nur den Eigenwert 1



2. Möglichkeit: Zweiter Eigenwert $k_2 = -1$ (also $b_2 = -1$)

Der zweite Eigenvektor ist dann $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Er gibt die Abbildungsrichtung (Affinitätsrichtung) an.

1. Zahlenbeispiel: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$. Das bedeutet: $\begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = -y \end{Bmatrix}$ oder $\vec{x}' = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der zweite Eigenvektor ist dann $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wegen $y' = -y$ liegt der Bildpunkt auf einer Parallelen zur x-Achse im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Achse.

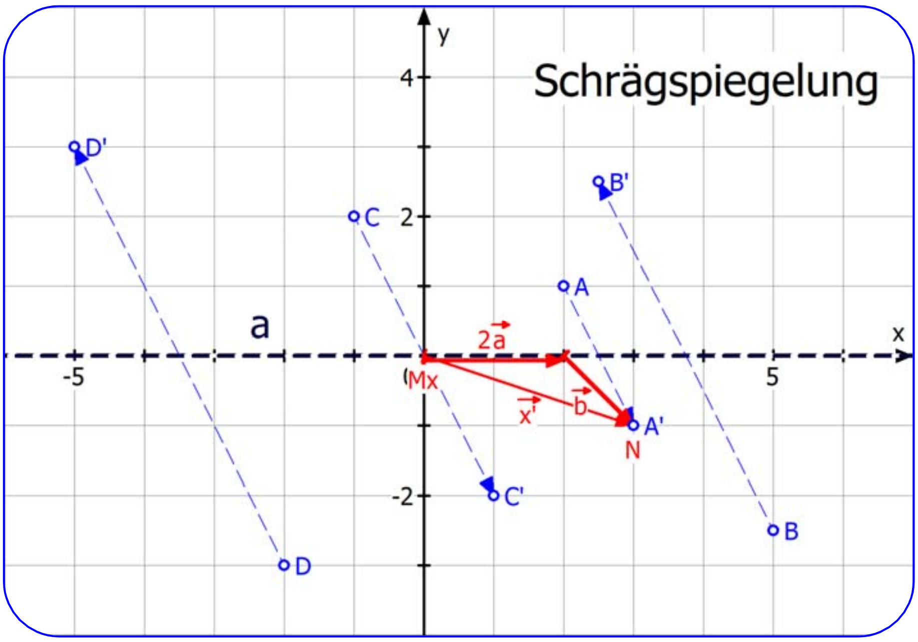
Ich konstruiere jetzt den Bildpunkt A' von A mit Hilfe der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

Ausgehend von $A(2\,|\,1)$ wird $\vec{x}' = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{a}} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(3\,|\,-1)$

Man beobachtet, dass alle Punkt schräg an der Achse gespiegelt werden, und zwar in Richtung des zweiten Eigenvektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

α ist eine Schrägspiegelung, weil es eine Achse gibt und nur die Eigenwerte 1 und -1

Der Sammelbegriff für Schrägspiegelung und Orthogonalspiegelung ist Affinspiegelung.



2. Zahlenbeispiel: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \vec{x}$. Das bedeutet: $\begin{Bmatrix} x' = x \\ \mathbf{y' = -y} \end{Bmatrix}$ oder $\vec{x}\,' = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Der zweite Eigenvektor ist dann $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. ein Vielfaches davon,

also auch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Die Affinitätsrichtung ist also parallel zur y-Achse.

Die Eigenwerte sind 1 und -1 und die x-Achse ist Fixpunktgerade, also liegt eine Affinspiegelung vor. Weil die Abbildungsrichtung senkrecht zur Achse ist, haben wir jetzt die Orthogonalspiegelung an der x-Achse.

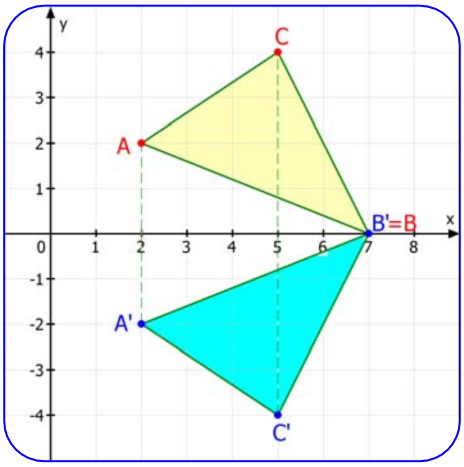
α ist eine Orthogonalspiegelung, weil es eine Achse gibt und nur die Eigenwerte 1 und -1 und wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist

Beispiel: $C(5\,|\,4)$ soll an der x-Achse gespiegelt werden. Sein Ortsvektor ist $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bildpunkt: $\vec{c}\,' = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Oder: $\vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(5\,|\,-4)$

B liegt auf der Spiegelachse und ist daher ein Fixpunkt: $B' = B$



3. Möglichkeit: Zweiter Eigenwert $k_2 \neq \pm 1$

Zahlenbeispiel: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$. Das bedeutet: $\begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = 3y \end{Bmatrix}$ oder $\vec{x}' = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der zweite Eigenvektor ist dann $\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sie hat die charakteristische Gleichung $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ 0 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \iff (1-k)(3-k) = 0$

Daraus folgen die Eigenwerte $k_1 = 1, k_2 = 3$:

Die Affinitätsrichtung ist $\overrightarrow{PP'} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Siehe Eigenvektor $\vec{v}$)

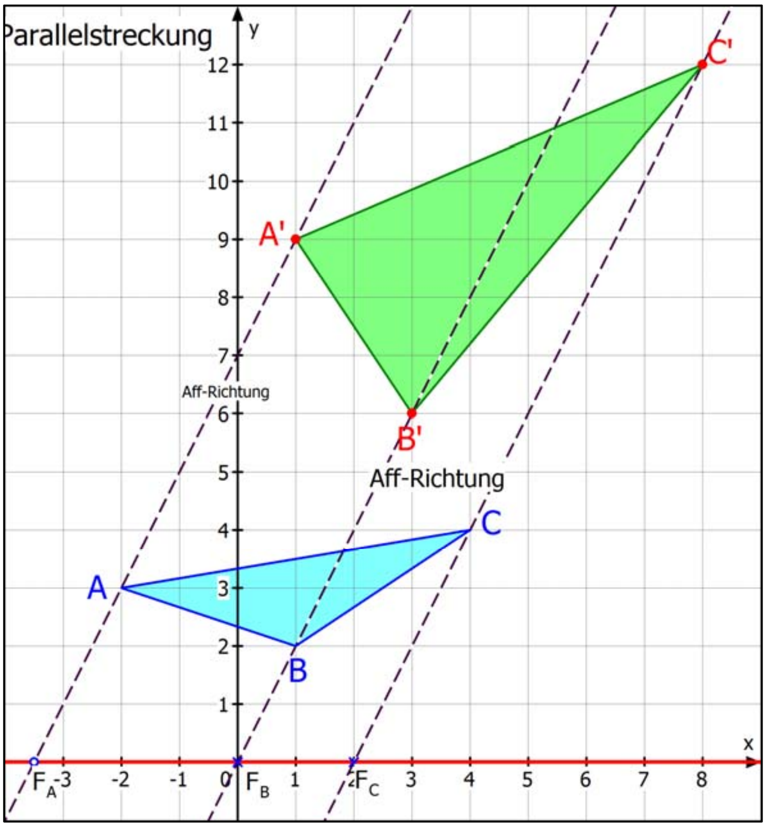
Die Punkte A, B und C werden parallel in Affinitätsrichtung von der Achse **weggestreckt**.
Der Streckfaktor, den man auch Affinitätsverhältnis nennt, ist der Eigenwert $k_2 = 3$.

Da alle Vektoren in Affinitätsrichtung Eigenvektoren sind, sind die Pfeile der Bildvektoren stets dreimal so lang wie die der Urbilder:

$\overrightarrow{F_A A'} = 3 \cdot \overrightarrow{F_A A}$, $\overrightarrow{F_B B'} = 3 \cdot \overrightarrow{F_B B}$ und $\overrightarrow{F_C C'} = 3 \cdot \overrightarrow{F_C C}$.

Jeder Gerade in Affinitätsrichtung ist eine Fixgerade.

α ist eine Affinstreckung, weil es eine Achse gibt und nur die Eigenwerte 1 und $k \neq \pm 1$



Übersicht über Achsenaffinitäten

Voraussetzung: α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse) und daher den ersten Eigenwert 1.

2. Eigenwert	Typ	Abbildungsgleichung wenn x-Achse Fixpunktgerade	Fixgeraden
$k_2 = 1$	Scherung	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$ b_1 gibt die Stärke der Scherung an.	Fixgeraden $\parallel$ a
$k_2 = -1$	Affinspiegelung Orthogonalspiegelung Schrägspiegelung	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$ falls $b_1 = 0$ falls $b_1 \neq 0$	Fixgeraden in Affinitätsrichtung
$k_2 \neq \pm 1$	Affinstreckung	$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ falls $b_2 \neq \pm 1$	Fixgeraden in Affinitätsrichtung

Diese Eigenschaften gelten auch, wenn die Fixpunktgerade nicht die x-Achse ist.

Dann sehen aber die Abbildungsgleichungen anders aus.

Beispiele dazu folgen jetzt.

3 Beispiele von Achsenaffinitäten mit schräger Achse

3.1: $\alpha:$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ bzw. $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{3}{2}y \\ y = -\frac{2}{3}x + 2y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - \frac{3}{2}y = 0 & (1) \\ \frac{2}{3}x - y = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

(1) und (2) führen auf $y = \frac{2}{3}x$: Fixpunktgerade (Affinitätsachse).

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 0-k & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -k & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(2-k)+1=0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$ Doppelte Lösung.

Ergebnis: α hat eine Achse und nur den Eigenwert 1. Also ist α eine Scherung.

Eigenvektoren: Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 + \frac{3}{2}u_2 = 0 & (3) \\ -\frac{2}{3}u_1 + u_2 = 0 & (4) \end{Bmatrix}$

(4) ist das $\frac{2}{3}$ – fache von Gleichung (2), stellt also keine neue Bedingung dar.

Ich wähle $u_1 = 3r, r \in \mathbb{R} \Rightarrow -\frac{2}{3} \cdot 3r + u_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 2r$

Lösungsvektor (Eigenvektor): $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

Dieser einzige Eigenvektor hat die gleiche Richtung wie die Affinitätsachse, was typisch für die Scherung ist.

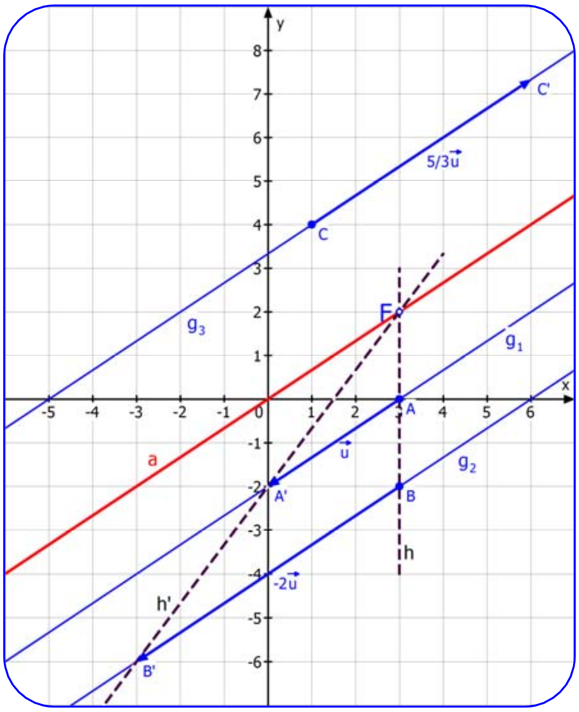
Fixgeraden: Alle Parallelen zur Achse : $y = \frac{2}{3}x + n, \; n \in \mathbb{R}$

Details: Alle Punkte der Achse a sind Fixpunkte.

Alle Parallelen zu a sind Fixgeraden: g_1, g_2, g_3 usw.
Wenn z. B. A und A' bekannt sind, kann man zu B den Bildpunkt konstruieren:

Die Gerade h = (FAB) wird abgebildet in $h' = (FA')$. Darauf liegt auch B'.

Andererseits weiß man, dass jeder Punkt, also auch B parallel zur Achse „geschert" wird. Die Parallele zu a durch B schneidet h' in B'.



3.2 α : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ y = -2x \quad\quad + 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 = \quad x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\ 0 = -2x - \quad y + 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (2) das (-2)-fache von (1) ist, stellt (2) keine neue Bedingung dar.

Also sind alle Punkte, die (1) lösen, Fixpunkte.

α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse): $\boxed{y = -2x + 1}$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 2-k & 0,5 \\ -2 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 2-k & 0,5 \\ -2 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(2-k)+1=0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 0}{2} = 1$ Doppelte Lösung.

Also liegt eine Scherung vor.

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} 2-1 & 0,5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 + 0,5u_2 = 0 \\ -2u_1 - u_2 = 0 \end{Bmatrix}$

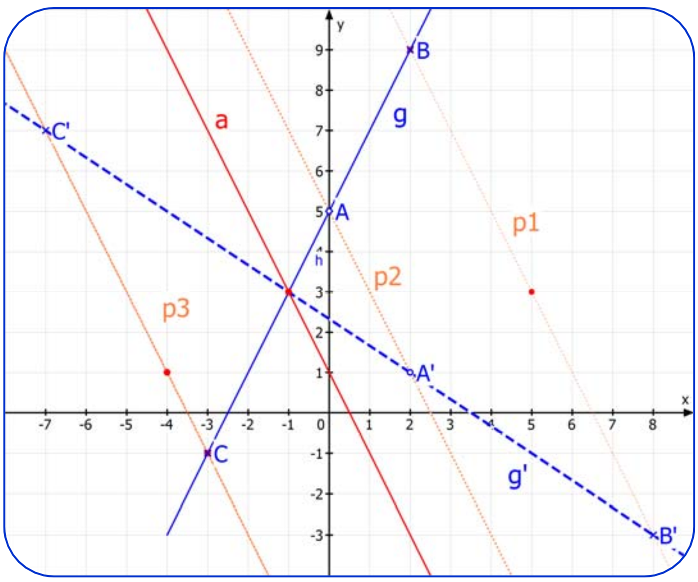
(2) ist ein Vielfaches von (1), also ist (1) entbehrlich. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ -2r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. α hat eine Fixpunktgerade: $\boxed{y = -2x + 1}$

2. Fixgeraden in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gibt. **Alle Parallelen zur Achse.**



3.3 $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

1. Schritt: Bestimmung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -0,6x + 0,8y = x \\ 0,8x + 0,6y = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -1,6x + 0,8y = 0 \\ 0,8x - 0,4y = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Da (1) das (-2)-fache von (2) ist, sind beide Gleichungen gleichwertig..

Also sind alle Punkte, die z. B. (2) lösen, Fixpunkte:

α besitzt eine Fixpunktgerade (Achse): $\boxed{y = 2x}$

2. Schritt: Bestimmung der Eigenwerte:

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} -0,6-k & 0,8 \\ 0,8 & 0,6-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} -0,6-k & 0,8 \\ 0,8 & 0,6-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-0,6-k)(0,6-k) - 0,64 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \pm 1$

3. Schritt: Bestimmung der Eigenvektoren:

Eigenwertsystem zu k = 1: $\begin{pmatrix} -1,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -1,6 \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = 0 & (1) \\ 0,8 \cdot u_1 - 0,4 \cdot u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

(1) ist entbehrlich. Wählt man $u_1 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$.

Eigenvektoren sind also $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = \vec{u}_1$ (Achsenrichtung)

Eigenwertsystem zu k = -1: $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,8 & 1,6 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0,4 \cdot u_1 + 0,8 \cdot u_2 = 0 & (1) \\ 0,8 \cdot u_1 + 1,6 \cdot u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

(2) ist entbehrlich. Wählt man $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = -2r$.

Eigenvektoren sind daher $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2r \\ r \end{pmatrix}$ bzw. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = -\vec{u}_2$.

Also liegt eine Affinspiegelung in Richtung $\vec{u}_2$ vor.

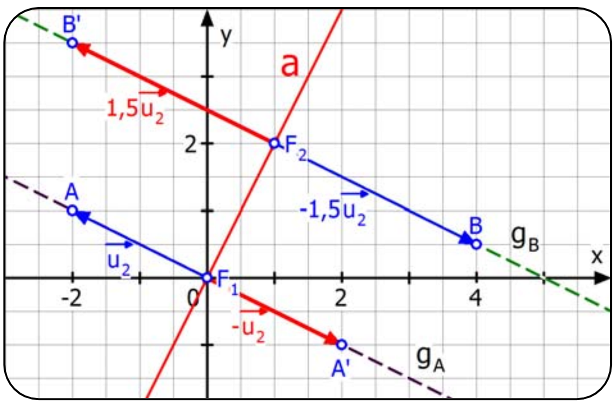
Weil jedoch $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ ist die Spiegelungsrichtung orthogonal zur Achse.

Also liegt eine Orthogonalspiegelung vor.

4. Schritt: Bestimmung der Fixgeraden:

1. Die Achse $y = 2x$ ist Fixpunktgerade.
2. Alle Geraden in Richtung $\vec{v}$:

   $y = -\frac{1}{2}x + n, \; n \in \mathbb{R}$.



Zur Zeichnung:

Man spiegelt A, indem aus $\overrightarrow{F_1A} = \vec{u}_2 \to -\vec{u}_2 = \overrightarrow{F_1A'}$ wird. Analog dazu wird $\overrightarrow{F_2B} = -1,5\vec{u}_2$ abgebildet auf $-\overrightarrow{F_2B} = +1,5\vec{u}_2 = \overrightarrow{F_2B'}$.

3.4 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$

Fixpunkte Die Fixpunktgerade (Achse) hat die Gleichung **y = 2x – 3** (siehe Seite 5).

Eigenwertsystem: : $\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-k & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{3}{5}-k & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}-k\right)\left(-\frac{3}{5}-k\right) - \frac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow$

Eigenwerte: $k^2 - \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k_{1,2} = \pm 1$

Eigenvektoren zu k = 1: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5}-\mathbf{1} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}-\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5}u_2 = 0 & (1) \\ \frac{16}{5}u_1 - \frac{8}{5}u_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $-2u_1 + u_2 = 0$

Jetzt wähle ich $u_1 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2u_1 = 2r$.

Lösungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren zu k = -1: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5}+\mathbf{1} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & -\frac{3}{5}+\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{16}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{8}{5}u_1 + \frac{1}{5}u_2 = 0 & (3) \\ \frac{16}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2 = 0 & (4) \end{Bmatrix}$$

Die Gleichung (2) ist das Doppelte von (1) und daher keine neue Bedingung.
Also bestimmt man u_1 und u_2 nur aus (1), die man so umformt: $8u_1 + u_2 = 0$

Jetzt wähle ich $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -8u_1 = -8s$.

Lösungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ -8r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Ergebnis: Die Abbildung hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$

und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = -\vec{v}$ und deren Vielfache.

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem von Seite 8, wo mit der Affinitätsrichtung anstatt mit Eigenvektoren gearbeitet worden ist. Hinweis: Es liegt eine **Schrägspiegelung** vor. (Merkmal: Achsenaffinität mit den Eigenwerten 1 und -1.)

3.5 $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x = 0{,}8x + 0{,}3y \\ y = 0{,}2x + 0{,}7y \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 0{,}2x - 0{,}3y = 0 \\ -0{,}2x + 0{,}3y = 0 \end{Bmatrix}$

Die 2. Gleichung ist keine neue Bedingung für Fixpunkte. Fixpunkte sind also alle Punkte, die $0{,}2x - 0{,}3y = 0$ erfüllen, d. h. auf der Geraden $y = \frac{2}{3}x$ liegen.

Eigenwertsystem: (EWS) $\begin{Bmatrix} (0{,}8-k)\cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7-k)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0{,}8-k & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 0{,}8-k & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7-k \end{vmatrix} = 0$ d. h. $k^2 - 1{,}5 \cdot k + 0{,}5 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}5}}{2} = \frac{1{,}5 \pm 0{,}5}{2} = \begin{cases} 1 \\ 0{,}5 \end{cases}$

Eigenvektoren zu $k_1 = 1$: $\begin{Bmatrix} (0{,}8-1)\cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7-1)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} -0{,}2 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 - 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Die Gleichung (1) ist ein Vielfaches der zweiten, weshalb es unendlich viele Lösungen gibt.

Aus (1) folgt: $0{,}3u_2 = 0{,}2u_1 \iff u_2 = \frac{2}{3}u_1$. Ich wähle $u_1 = 3r$ und erhalte $u_2 = 2r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Sie **gehören zum Eigenwert $k_1 = 1$**, d. h. für sie gilt: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$ (Achsenrichtung).

Eigenvektoren für $k_2 = 0{,}5$: $\begin{Bmatrix} (0{,}8-0{,}5)\cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + (0{,}7-0{,}5)\cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 0{,}3 \cdot u_1 + 0{,}3 \cdot u_2 = 0 \\ 0{,}2 \cdot u_1 + 0{,}2 \cdot u_2 = 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \mid :0{,}3 \\ \mid :0{,}2 \end{matrix}$

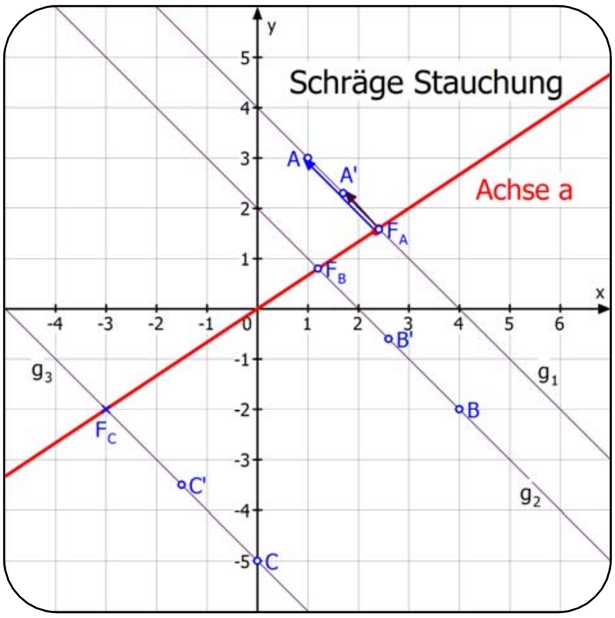
Aus beiden Gleichungen folgt $u_1 + u_2 = 0$

Wählt man z. B. $u_1 = r$, folgt $u_2 = -r$ und wir haben als zweiten Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sie **gehören zum Eigenwert $k_2 = 0{,}5$**, d. h. $\vec{u}_2' = \frac{1}{2} \cdot \vec{u}_2$

Ergebnis: α ist eine **Parallelstreckung**.

Wegen $k_2 = \frac{1}{2} < 1$ kann man auch Stauchung sagen. Es ist also eine schräge Stauchung von der Achse aus:



Aus $\overrightarrow{F_A A}$ wird $\overrightarrow{F_A A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_A A}$, denn $\overrightarrow{FA}$ hat die Richtung des zweiten Eigenvektors $\vec{u}_2$.

Fixgeraden sind g_1, g_2, g_3, denn sie verlaufen in Richtung $\vec{u}_2$.

3.6 Gegeben ist α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = \frac{1}{2}x + y + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2y + 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}x - y = 1 & (1) \\ \frac{1}{2}x - y = 1 & (2) \end{matrix} \right\}$

Da (2) entbehrlich ist, gibt (1) die Bedingung für Fixpunkte an. (1) stellt die Gleichung einer Geraden dar: $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist also die **Fixpunktgerade** (Affinitätsachse).

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-k & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2-k \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$:

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-k & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2-k \end{vmatrix} = 0$ d. h. $\left(\frac{1}{2}-k\right)(2-k) + \frac{1}{2} = 0$

$k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 3 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Eigenvektor zum Eigenwert k = 1: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u_1 + u_2 = 0$

Wähle $u_1 = 2r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = r \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$

Der Eigenwert k = 1 führt zum Eigenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (Achsnrichtung).

Eigenvektoren zu $k = \frac{3}{2}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{o}$ d. h. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

d. h. $\left\{ \begin{matrix} -u_1 + u_2 = 0 & (3) \\ -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0 & (4) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow u_2 = u_1$

Man hat daher eine freie Wahl. Wähle $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = s$.

Also lautet der Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = \frac{3}{2} \cdot \vec{v}$.

2. Methode: ***Berechnung des zweiten Eigenvektors aus der Affinitätsrichtung:***

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \underbrace{x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}'} - \underbrace{\left[x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]}_{\vec{x}} = x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Trick besteht nun darin, zu erkennen, dass die drei Summanden Vielfache des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind, den man folglich ausklammern kann: $\overrightarrow{PP'} = \left[-\frac{1}{2}x + y + 1\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fixgeraden sind also außer der Fixpunktgeraden $y = \frac{1}{2}x - 1$ alle Geraden in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies ergibt die Fixgeradenschar: $y = x + c,\ c \in R$.

α **ist eine Parallelstreckung von a aus in Richtung $\vec{v}$ mit dem Faktor** $k_2 = \frac{3}{2}$ **.**

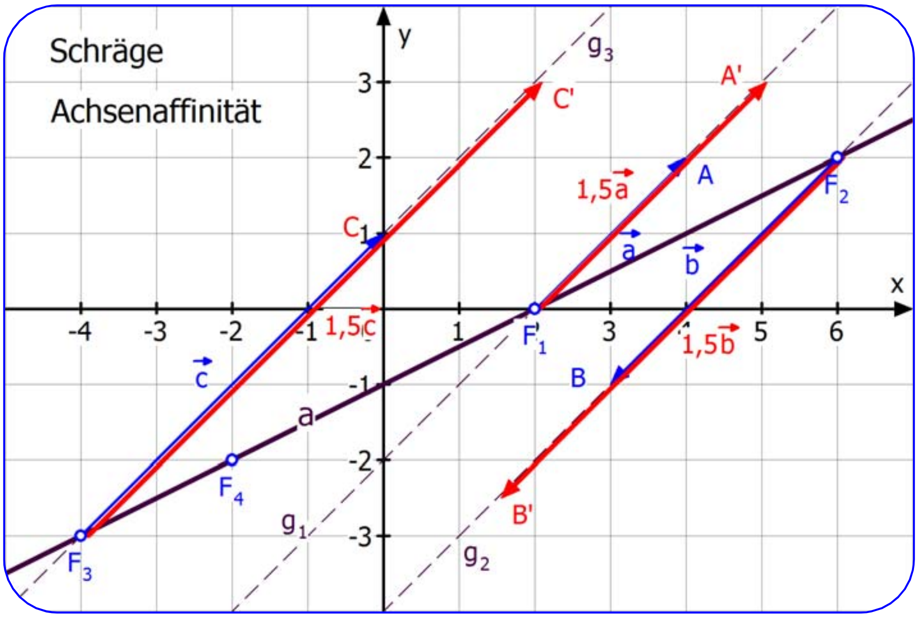
(c) **Berechnung** und **Konstruktion einiger Bildpunkte**

$A(4|2)$ $\quad \vec{a}' = 4\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad A'(5|3)$

$B(3|-1)$ $\quad \vec{b}' = 3\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad B'(1{,}5|-2{,}5)$

$C(0|1)$ $\quad \vec{c}' = 0\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad C'(2|3)$

$F_4(-2|-2)$ ist Fixpunkt, weil er auf der Achse liegt.



Konstruktion des Bildpunktes B':

Zeichne die Fixgerade durch B (Steigung 1). Ihr Schnittpunkt mit der Achse a ist der Fixpunkt F_2.

Der Vektor $\vec{b} = \overrightarrow{F_2B}$ hat die Richtung des Eigenvektors $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Daher gilt: $\overrightarrow{FB'} = 1{,}5\cdot\vec{b}$.

Der Pfeil von F_2 nach B wird also um die Hälfte verlängert, dort liegt dann B‘.

Auch hier liegt eine Parallelstreckung vor. Gestreckt wird mit dem Faktor $k_1 = \frac{3}{2}$.

Trainingsaufgaben 1:

Bestimme Fixpunkte und Fixgeraden und Abbildungstyp

a) $\vec{x}' = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\vec{x}$ $\qquad$ b) $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\-\frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ c) $\vec{x}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\-\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\vec{x}$

Lösungen ab Seite 42

4 Konstruktionen bei Achsenaffinitäten

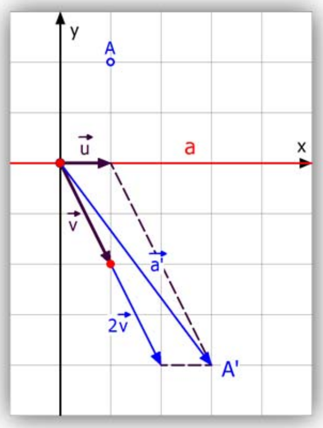
4.1 Vektorielle Konstruktion mit den Basisvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Die Abbildungsgleichungen in Vektorform zeigen uns, wie man jeden Bildpunkt finden kann, ohne seine Koordinaten berechnen zu müssen.

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \iff \vec{x}' = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \iff \begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = -2y \end{Bmatrix}$$

Diese affine Abbildung hat die x-Achse als Fixpunktgerade.

Ich will den Bildpunkt von $A(1|2)$ darstellen.



Für ihn gilt $\vec{a}' = \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Bezeichnet man die verwendeten „Basisvektoren“

mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann ist $\vec{a}' = 1 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$.

Die Zeichnung zeigt den Ortsvektor $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}'$ und seine Zusammensetzung aus $\vec{u}$ und $2\vec{v}$ im Parallelogramm.

Diese Konstruktion ist bei jeder affinen Abbildung möglich.

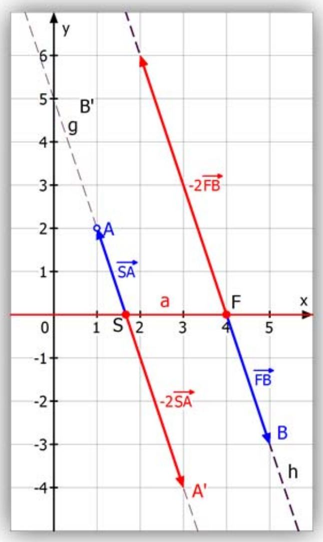
4.2 Vektorielle Konstruktionen mit den Eigenvektoren

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \iff \vec{x}' = x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \iff \begin{Bmatrix} x' = x + y \\ y' = -2y \end{Bmatrix}.$$

Diese Abbildung hat die x-Achse als Fixpunktgerade und besitzt die beiden linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = -2 \cdot \vec{v}$, sowie deren Vielfachen.

Folgerung: Alle Geraden in Richtung von $\vec{v}$ sind Fixgeraden sind. Diese haben die Steigung $m = -\frac{1}{3}$.

<u>Nun zur Konstruktion:</u> Abbildung der Punkte $A(1|2)$ und $B(5|-3)$.



Zuerst zeichnet man die durch A gehende Fixgerade mit der Steigung $m = -\frac{1}{3}$ ein. Diese schneidet die Achse a im Fixpunkt S. Dann zeichnet man den Pfeil $\overrightarrow{SA}$. Er ist auf Grund seiner Richtung ein Eigenvektor. Für seinen Bildvektor gilt daher $\overrightarrow{SA}' = -2 \cdot \overrightarrow{SA}$. Man zeichnet also von S aus nach unten den doppelt so langen Pfeil wie $\overrightarrow{SA}$ ein. Seine Spitze ist der gesuchte Bildpunkt A'. Dasselbe macht man für den Punkt B':

Fixgerade h durch B – Schnittpunkt F – Zum Pfeil $\overrightarrow{FB}$ bildet man $\overrightarrow{FB}' = -2 \cdot \overrightarrow{FB}$ und erhält B'.

Ist speziell der 2. Eigenwert -1, dann liegt eine <u>Schrägspiegelung</u> vor.
Dann überträgt man einfach den schrägen Punktabstand zur Achse auf die andere Seite.

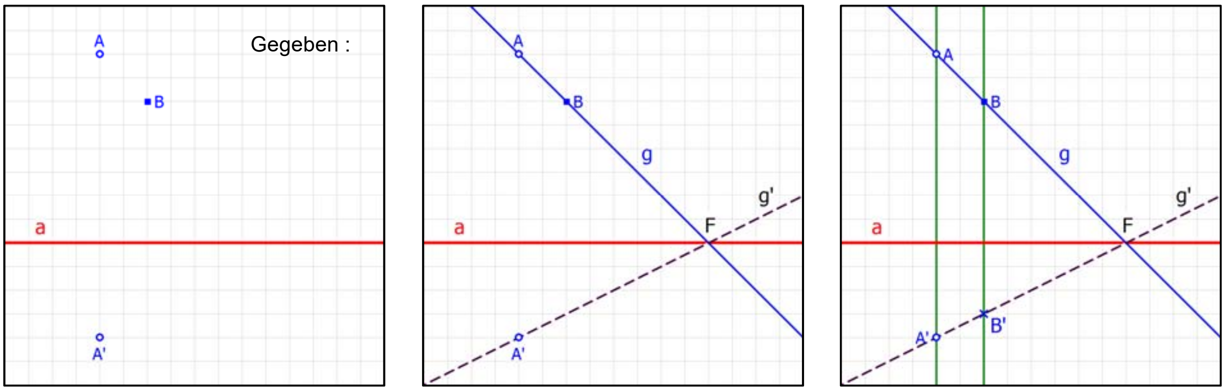
4.3 Bildpunkt-Konstruktionen mittels Affinitätsrichtung.

Die folgenden Zeichnungen fertige ich ohne Abbildungsgleichungen an.

Man benötigt nur die Affinitätsachse sowie einen Punkt und seinen Bildpunkt.

Dann kann man zu jedem anderen Punkt seinen Bildpunkt wie folgt konstruieren:

Beispiel 1



Erklärung: Links sind die Objekte eingezeichnet, die gegeben sind.

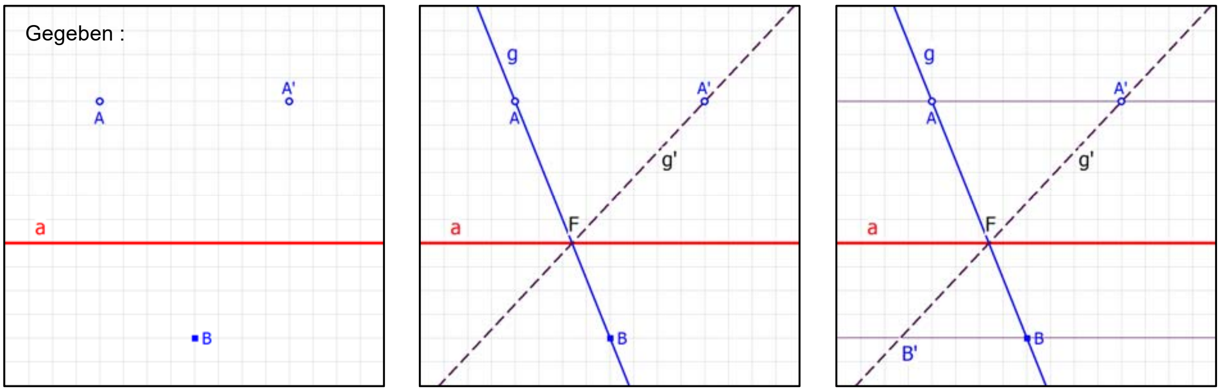
Mitte: Man verbindet die Urbilder als Gerade g. Diese schneidet die Achse in einem Fixpunkt.

Da der Punkt A nach A' abgebildet wird, ist die Verbindungsgerade (FA‘) die Bildgerade g'.

Rechts: Da B auf g liegt, muss B' auf g' liegen. Und weil man weiß, dass es bei Achsenaffinitäten eine Affinitätsrichtung gibt, in der alle Punkte abgebildet werden, muss man nur noch die Parallele zu (AA') durch B einzeichnen. Diese Hilfsgerade schneidet g' im gesuchten B'.

*Hinweis: Weil hier die Affinitätsrichtung orthogonal zur Affinitätsachse ist, spricht man von einer **senkrechten Achsenaffinität**.*

Beispiel 2 **Eine Besonderheit ist die Scherung:**

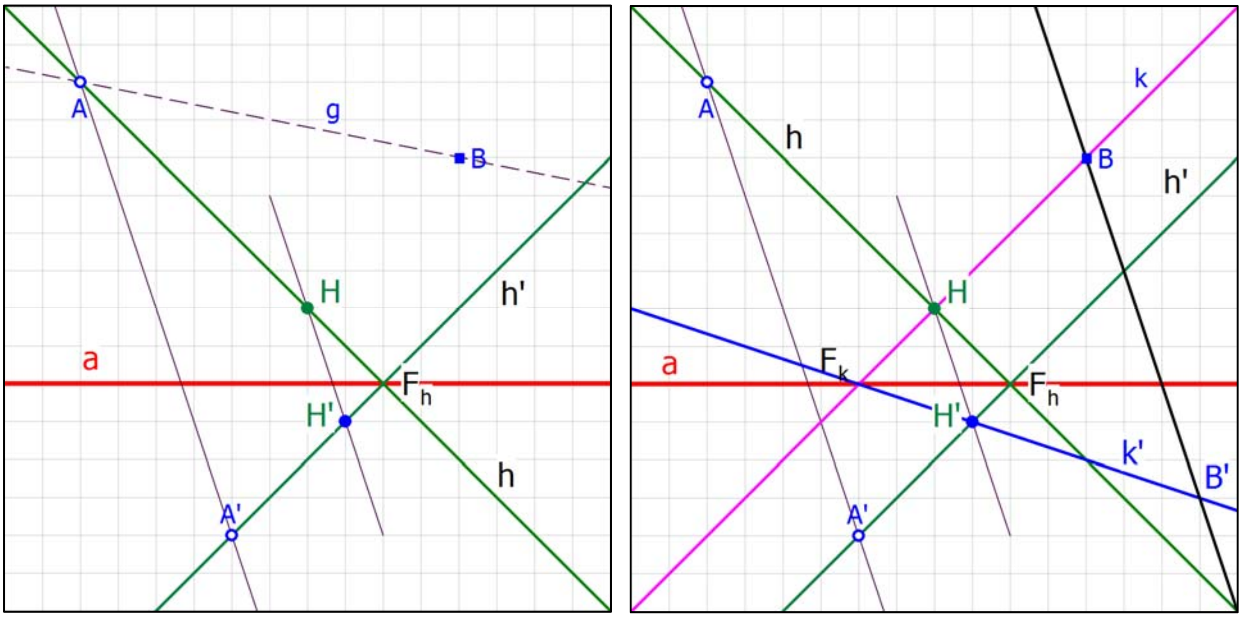


Es liegen dieselben Schritte wie in Beispiel 1 vor: Man erkennt auch sofort, dass die Affinitätsrichtung $\overline{AA'}$ **parallel** zur Achse a ist, dass also eine **Scherung** vorliegt.

Mitte: $g = (AB)$ schneidet die Ache A in F. Die Bildgerade ist $g' = (A'F)$.

Rechts: Die Parallele zur Affinitätsrichtung, also zu (AA'), durch B schneidet g' in B'.

Beispiel 3 Was tut man, wenn sich $g = (AB)$ und die Achse nicht auf dem Papier schneiden?



Links: Man sieht, dass der in den Beispielen 1 und 2 durchgeführte 1. Schritt nicht zum Erfolg führt.
Wenn man die Urbilder A und B zur Geraden g verbindet, schneidet diese die Achse a nicht. Also muss man zuerst B ganz ignorieren. Man wählt einen Hilfspunkt H, der so gesetzt wird, dass die Geraden h = (AH) und die später benötigte Gerade k = (BH) die Achse a auf dem Zeichenblatt schneiden.
Die Konstruktion beginnt damit, dass man wie in Beispiel 1 beschrieben zuerst den Bildpunkt H' von H konstruiert: h schneidet a im Fixpunkt F_h. Verbindet man A mit F_h, erhält man die Bildgerade h'.Nun muss man nur noch die Parallele zu (AA') (= Affinitätsrichtung) durch H einzeichnen, dann erhält man H' auf der Bildgeraden h'.

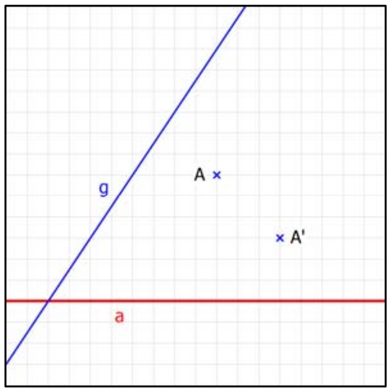
Rechts: Jetzt kann man B' mittels H und H' problemlos konstruieren:
Man verbindet B mit H zur Geraden k. Diese schneidet die Achse im Fixpunkt F_k.
Verbindet man F_k mit H', erhält man die Bildgerade h', auf der dann auch B' liegt.
Dazu muss man nur noch eine Gerade durch B in Affinitätsrichtung legen, also parallel zu (AA') oder (HH').

Ich habe in diesen Zeichnungen die Achse a immer horizontal eingezeichnet. Eine schräge Lage ändert nichts am Konstruktionsprinzip. Weiter hinten folgen Konstruktionen mit anderer Achsenlage.

Als nächstes konstruieren wir Bildgeraden.

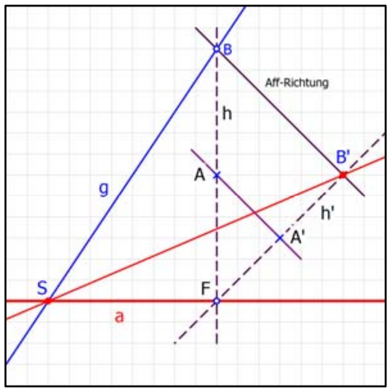
4.4 Konstruktionen von Bildgeraden bei Achsenaffinitäten.

Beispiel 4: **Der einfachste Fall: Die Gerade schneidet die Achse auf dem Zeichenblatt.**



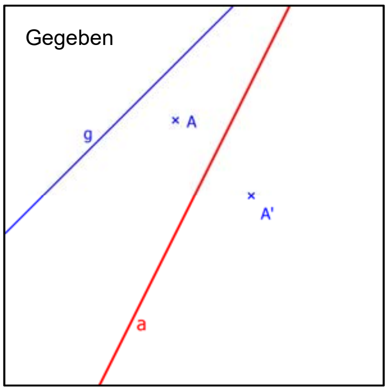
Gegeben ist die Achse a, eine Gerade g sowie die Punkte A und A'.
Gesucht ist die Bildgerade g'.

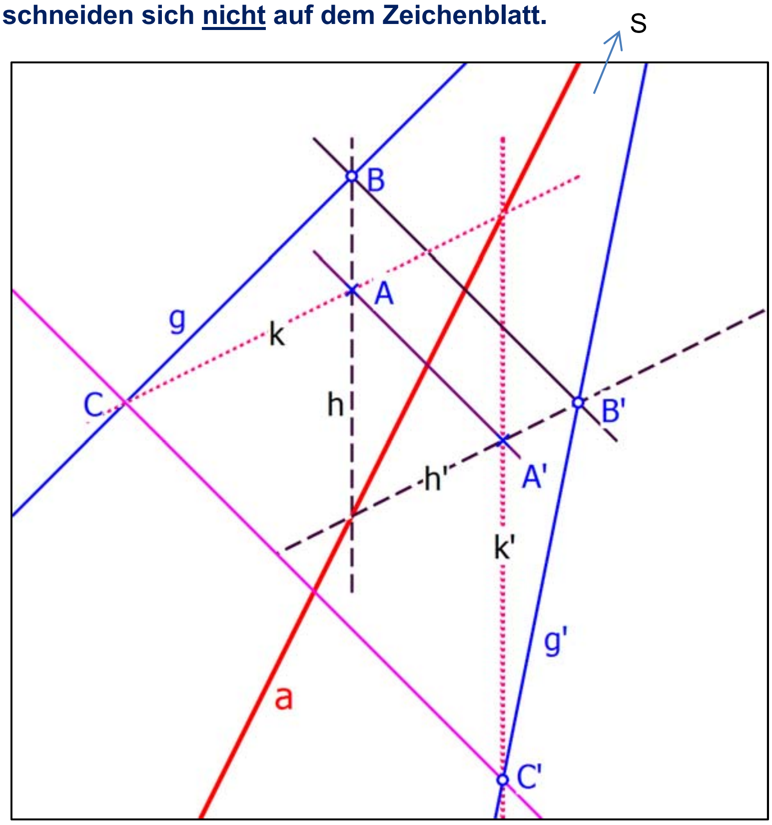
Die <u>Lösungsidee</u> sieht so aus: Man wählt auf g einen günstigen Punkt B aus, dessen Bildpunkt B' konstruiert wird.
Günstig heißt in diesem Fall: Die Hilfsgerade h = (AB) muss die Achse a schneiden, damit man B' findet.



In der unteren Zeichnung habe ich B senkrecht über A gewählt.
Die Hilfsgerade (AB) schneidet die Achse a im Fixpunkt F.
Daher ist $h' = (FA')$ das Bild der Hilfsgeraden, auf der dann auch B' liegt. Dazu zeichnet man durch B eine Gerade in Affinitätsrichtung, also parallel zu (AA‘). Der Schnittpunkt mit h' ist B'.
B' muss mit dem Fixpunkt von g verbunden werden, also mit dem Schnittpunkt S von g und a. Dann hat man g'.

Beispiel 5: **Der aufwändige Fall:**
Gerade und Achse schneiden sich <u>nicht</u> auf dem Zeichenblatt.



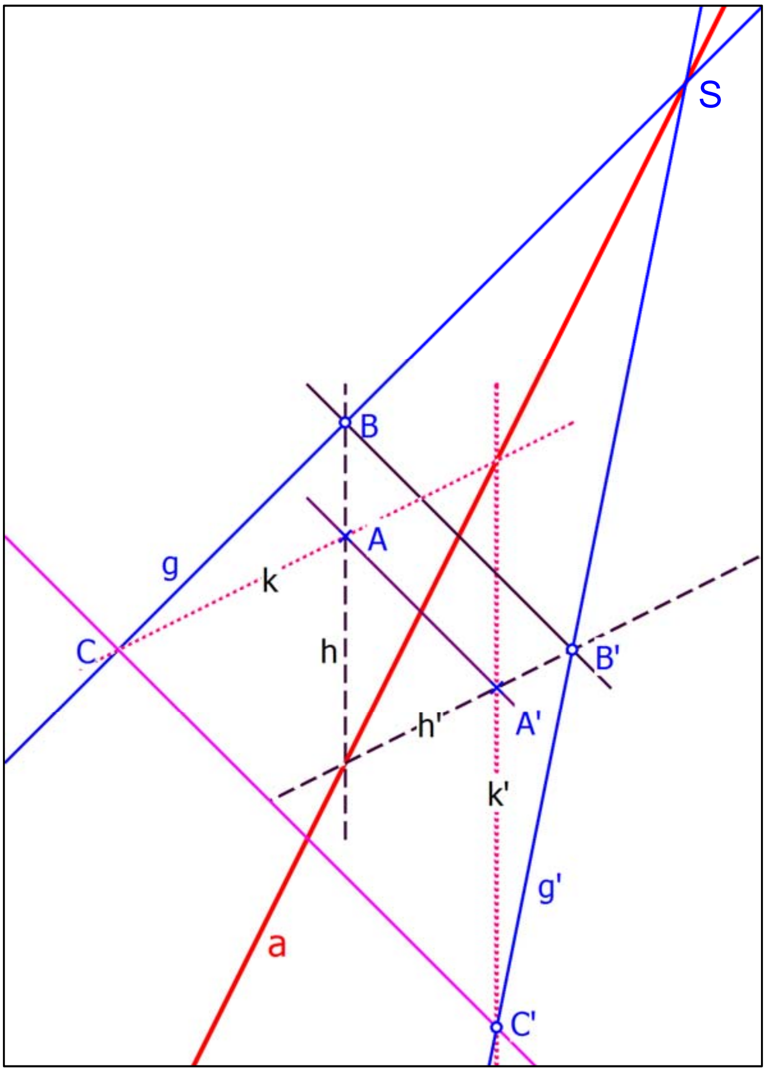


Hier fehlt der Schnittpunkt S von g und a, mit dem man B' verbinden kann um g' zu finden (siehe oben).
Folglich muss man **<u>zwei</u>** Punkte B und C auf g wählen, ihre Bildpunkte B' und C' mit Hilfe von A und A' konstruieren und diese dann zu g' verbinden.

Fortsetzung auf der nächsten Seite …

MERKE: **Eine Gerade g und ihr Bild g' schneiden sich immer auf der Affinitätsachse.**

Beweis: Der Schnittpunkt S einer Geraden mit der Achse ist ein Fixpunkt, weil die Achse aus lauter Fixpunkten besteht. Andererseits liegt der Bildpunkt S' auf der Bildgeraden g'. Wegen $S' = S$ geht also auch g' durch S. (Siehe große Darstellung:)



Trainingsaufgabe 2

a) Wie lautet die Gleichung dieser Abbildung, deren Affinitätsachse die Gleichung $y = 2x - 2$ lautet, und die $A(1{,}5 \mid 4)$ auf $A'(3{,}5 \mid 2)$ abbildet

b) Die Gleichung von g lautet $y = x + 4$. Welche Gleichung hat die Bildgerade? Berechne den Schnittpunkt von g und g' und zeige, dass dieser auf der Achse liegt.

c) Konstruiere die Bildgerade.

Lösung Seite 45

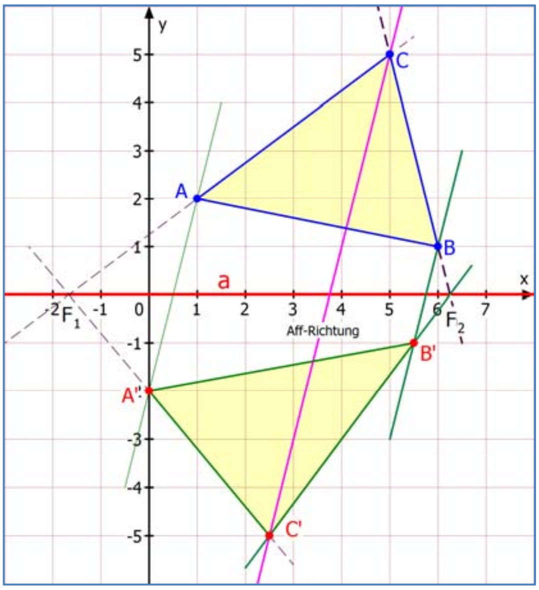
4.5 Konstruktion eines Bilddreiecks bei einer Achsenaffinität

Beispiel 6

Eine affine Abbildung hat die x-Achse als Affinitätsachse. Konstruiere das Bild des Dreiecks $A(1|2)$, $B(6|1)$, $C(5|5)$. wenn man weiß dass $A'(0|-2)$ der Bildpunkt von A ist.

Lösung:

Man verlängert die Dreiecksseite AC bis zur Achse a und erhält den Fixpunkt F_1.
Die Gerade (F_1A) hat (F_1A') als Bild.
Auf diesen Geraden liegen auch C und C':
C' erhält man dann durch eine Parallele zu (AA') (= Affinitätsrichtung).
Entsprechend verlängert man die Strecke CB zu einer Geraden, welche a in F_2 schneidet. (F_2C') ist deren Bildgerade. Den Bildpunkt B' erhält man durch eine Parallele in Affinitätsrichtung durch B.

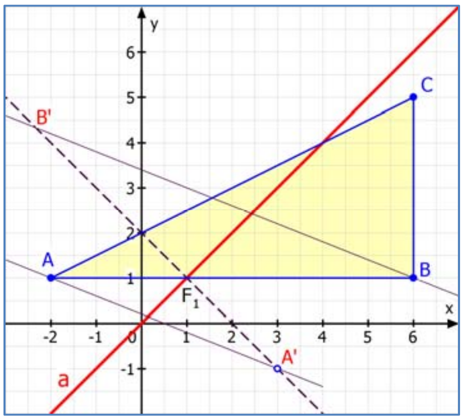


Beispiel 7

Eine affine Abbildung hat die Affinitätsachse y = x. Konstruiere das Bild des Dreiecks $A(-2|1)$, $B(6|1)$, $C(6|5)$. wenn man weiß dass $A'(3|-1)$ der Bildpunkt von A ist.

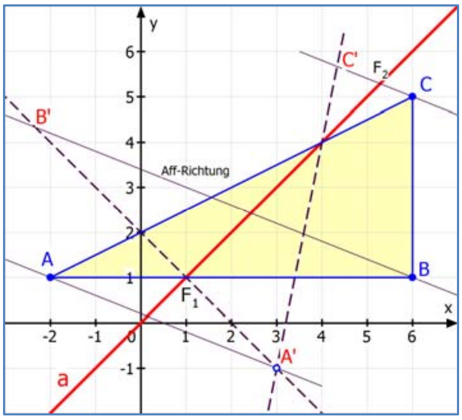
Lösung:

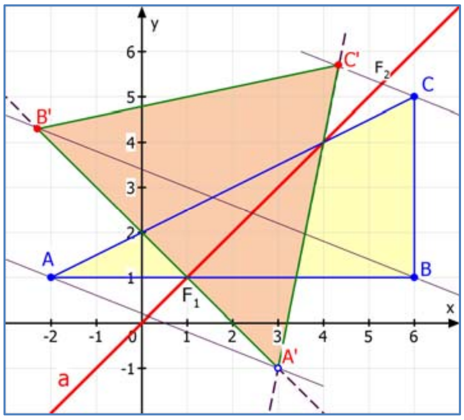
Die erste Darstellung zeigt die Konstruktion des Bildpunktes B'. Dazu nützt man den Schnittpunkt F_1 der Geraden (AB) mit der Affinitätsachse. Denn mit seiner Hilfe erhält man die Bildgerade $(A'F_1)$, auf der dann B' liegt. B' entsteht, indem man die Parallele zu (AA') (Affinitätsrichtung) durch B mit $(A'F_1)$ schneidet.



Die letzte Darstellung enthält das rot gefärbte Bilddreieck $A'B'C'$.

Man beachte, dass bei dieser Abbildung der rechte Winkel verloren geht.
Das wird noch ein interessantes Thema.

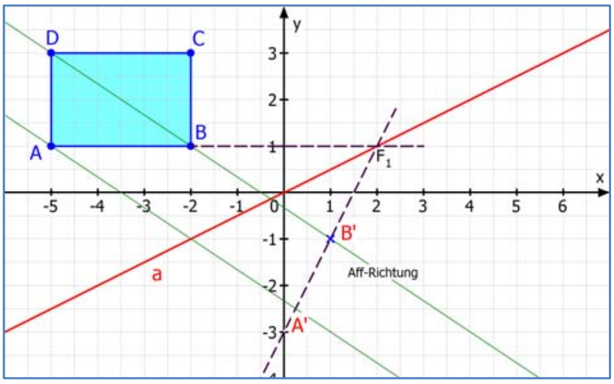




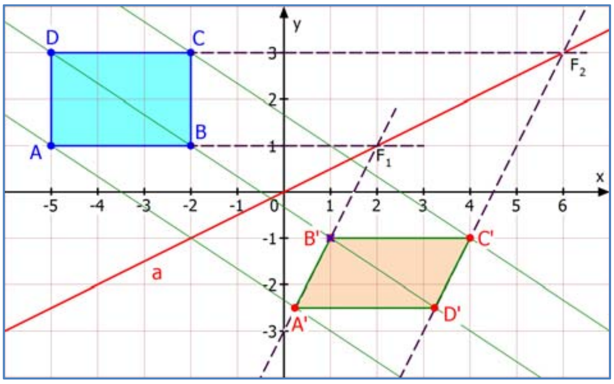
4.6 Konstruktionen der Bildfigur eines Rechtecks

Beispiel 8:

Eine affine Abbildung hat die Affinitätsachse $y = \frac{1}{2}x$. Konstruiere das Bild des Rechtecks $A(-5\,|\,1)$, $B(-2\,|\,1)$, $C(-2\,|\,3)$, $D(-5\,|\,3)$. wenn man weiß dass $B'(1\,|-1)$ der Bildpunkt von B ist.



Die erste Zeichnung zeigt die Konstruktion des Bildpunktes A': Die Gerade (AB) hat den Fixpunkt F_1. Daher ist (F_1B') die Bildgerade. Auf ihr liegt A', den man als Schnittpunkt mit der Geraden durch A in Affinitätsrichtung, also parallel zu (BB'), erhält.



Jetzt kann man sich Arbeit sparen, wenn man bedenkt, dass ein Rechteck parallele Seiten hat und dass diese Parallelität bei der Bildfigur erhalten bleibt:
Daher zeichne ich die Gerade (CD) ein mit ihrem Fixpunkt F_2 auf der Achse a. Da (CD) parallel zu (AB) ist, gilt dasselbe für ihre Bildgeraden. Also zeichnet man durch F_2 die Parallele zu $(F_1A'B')$.
Nun muss man lediglich noch die Geraden in Affinitätsrichtung durch C und D einzeichnen und erhält als Schnittpunkte die gesuchten Bildpunkte C' und D'.

Man beachte, dass die Bildfigur zwar noch ein Parallelogramm ist, aber kein Rechteck mehr, weil sich bei affinen Abbildungen die Winkel ändern, wenn es sich nicht um Kongruenzabbildungen oder Ähnlichkeitsabbildungen handelt.

Merke also:

Parallelogramme werden in Parallelogramme abgebildet.

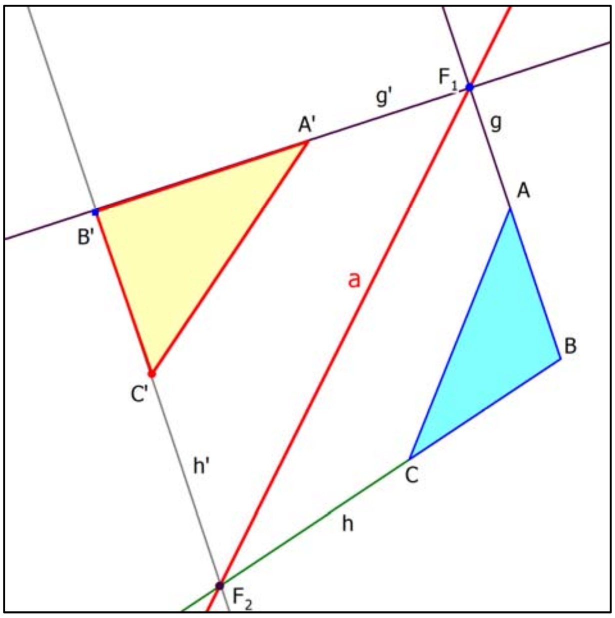
Spezielle Parallelogrammeigenschaften wie rechte Winkel (bei Rechtecken) bleiben dabei nur dann erhalten, wenn die affine Abbildung eine Kongruenzabbildung oder Ähnlichkeitsabbildung ist.

4.7 Konstruktion der Affinitätsachse aus Dreieck und Bilddreieck

Gegeben sind ein Dreieck und sein Bild. Konstruiere dazu die Affinitätsachse.

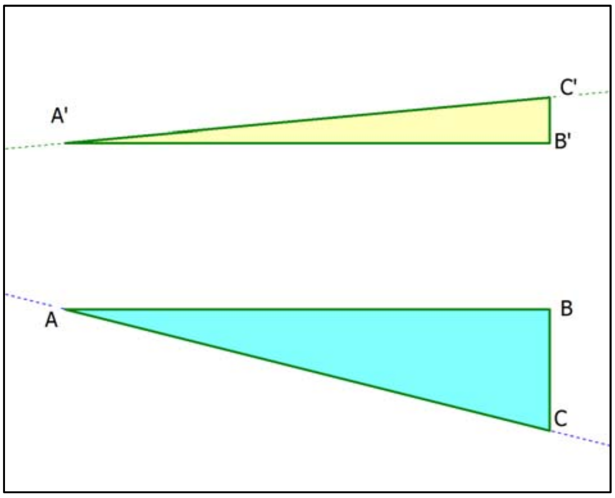
1. Fall:

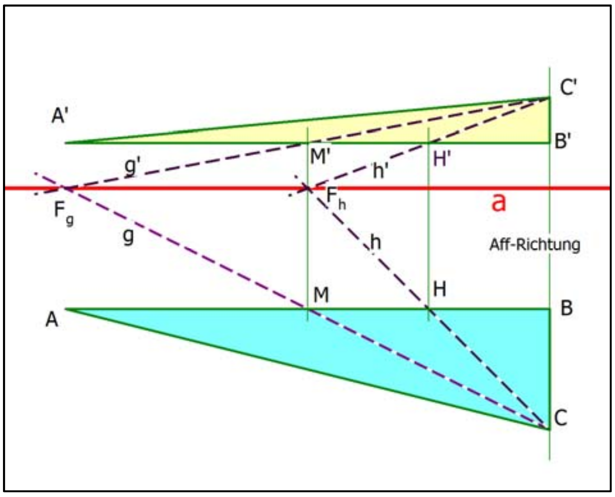
Man zeichnet die Geraden g = (BA) und ihre Bildgerade $g' = (B'A')$ ein.
Ihr Schnittpunkt ist ein Fixpunkt F_1 auf der gesuchten Achse. Analog dazu schneiden sich h = (BC) und $h' = (B'C')$ in F_2.
Die Gerade durch F_1 und F_2 ist die Achse.



2. Fall:

Hier schneiden sich (AC) und $(A'C')$ nicht, und man findet auch kein zweites Paar das sich in einem Fixpunkt schneidet:

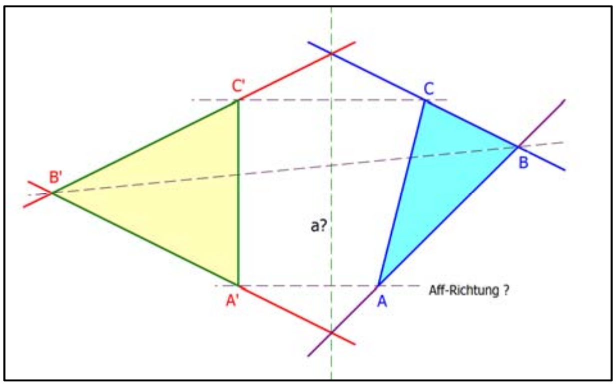




Dann muss man zwei Hilfspunkte (M und H) wählen und mittels Parallelen in Affinitätsrichtung ihre Bildpunkte M' und H' ermitteln. Jetzt kann man die Geraden g = (CM) und $g' = (C'M')$ sowie h = (CH) und $h' = (C'H')$ schneiden, was zu zwei Fixpunkten führt. Durch sie geht die gesuchte Achse a.

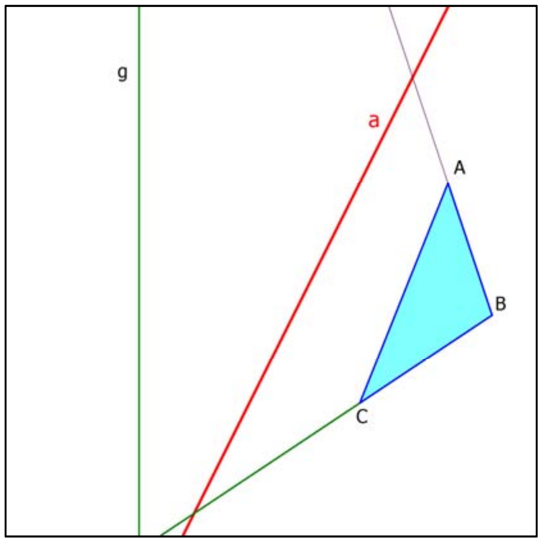
3. Fall: ***Achtung Falle !***

Wenn man hier eine Achse a durch die Schnittpunkte von (AB) mit $(A'B')$ und von (BC) mit $(B'C')$ einzeichnen, begeht man einen Fehler. Diese Abbildung hat keine Achse, was man daran sieht dass es keine Affinitätsrichtung gibt: (AA') und (BB') sind nämlich nicht parallel.



4.8 Gesucht ist eine rechtwinklige Bildfigur

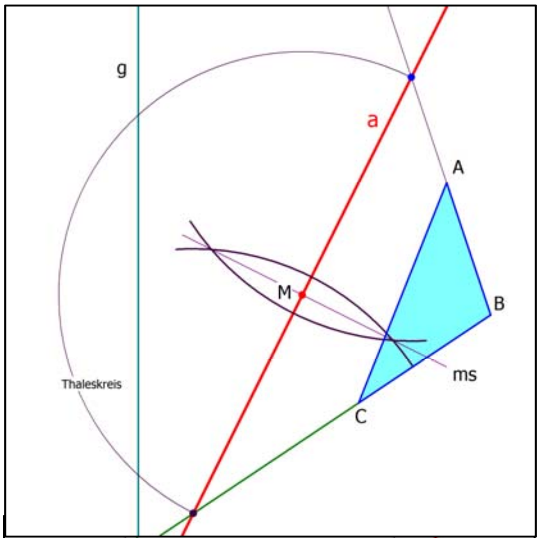
Gegeben ist ein Dreieck ABC und die Affinitätsachse. Die Affinitätsrichtung ist noch unbekannt.
Die Aufgabe besteht darin, ABC in ein bei B' rechtwinkliges Dreieck abzubilden.
Man weiß jedoch, dass B' auf einer Geraden g liegen soll.



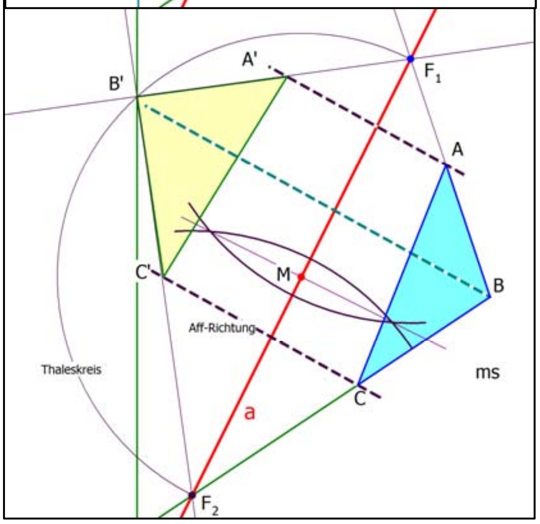
Konstruktionsbeschreibung:

Zuerst verlängert man die Strecken AB und BC (die ja zu den Katheten von A'B'C' werden sollen) bis zur Achse. Die beiden Schnittpunkte sind dann Fixpunkte der Abbildung.

Damit bei B' ein rechter Winkel entsteht, muss B' auf einem Halbkreis liegen, der durch diese beiden Fixpunkte geht, und außerdem auf dem Schnittpunkt des Kreises mit g liegt.



Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der von den Fixpunkten begrenzten Strecke.
Dazu habe ich die Mittelsenkrechte konstruiert.
(In der Abbildung rechts wurde das mit zwei Kreisbögen ausgeführt. Die Mittelsenkrechte ms schneidet die Achse a im Mittelpunkt M des benötigten Thaleskreises.)

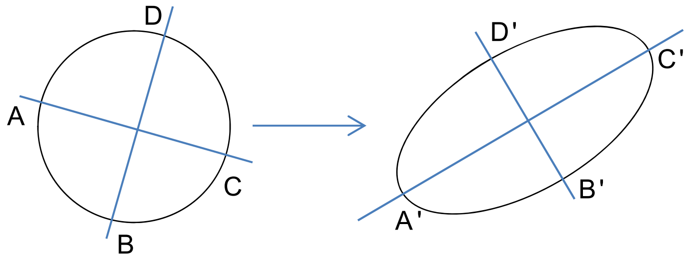


Für B' ergeben sich zwei Möglichkeiten.
Ich wähle den oberen Schnittpunkt für B'.
Er ist dann der gesuchte Bildpunkt von B.
Man kennt jetzt die Affinitätsrichtung $\overrightarrow{AA'}$.
Damit kann man nun die Bildpunkte A‘ und C‘ mittels Parallelen durch A und C in Affinitätsrichtung sofort festlegen.

Hinweis: *Für die Lage von B‘ wurde eine Zusatzangabe benötigt. Hier sollte* B' *auf g liegen: Da sind auch andere Möglichkeiten denkbar. Das war nur ein Beispiel von vielen.*

4.9 Das invariante Rechtwinkelpaar

Bildet man mit einer affinen Abbildung einen Kreis ab, entsteht daraus selten ein Kreis, meistens eine Ellipse :



Dabei tritt folgendes **Problem** auf. Zur Konstruktion der Ellipse muss man ihre Scheitel kennen. Man sieht dem Kreis aber nicht an, welche Punkte A, B, C, D bei der Abbildung zu den Ellipsenscheiteln A', B', C', D' werden. Hier sind sie <u>beliebig</u> eingezeichnet. Sie sind genau dann die richtigen Punkte, wenn die Bildstrecken A'C' und B'D' aufeinander senkrecht stehen. **Es geht um diese Aufgabe**:

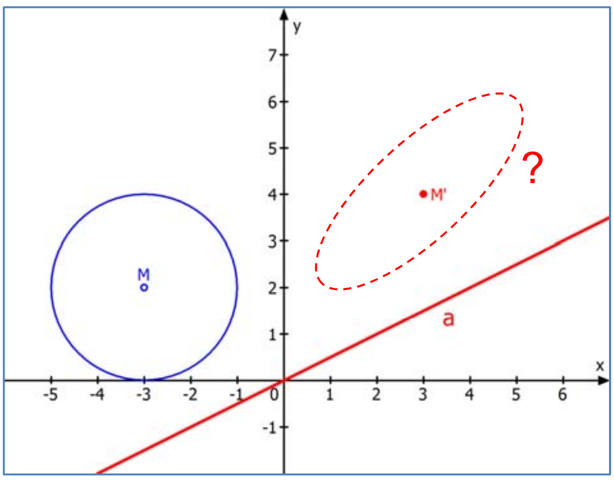
Gesucht ist das Paar orthogonaler Richtungen, dessen Bilder zueinander orthogonal sind.
Wir werden sehen: Es gibt genau ein solches **„invariantes" Rechtwinkelpaar**.

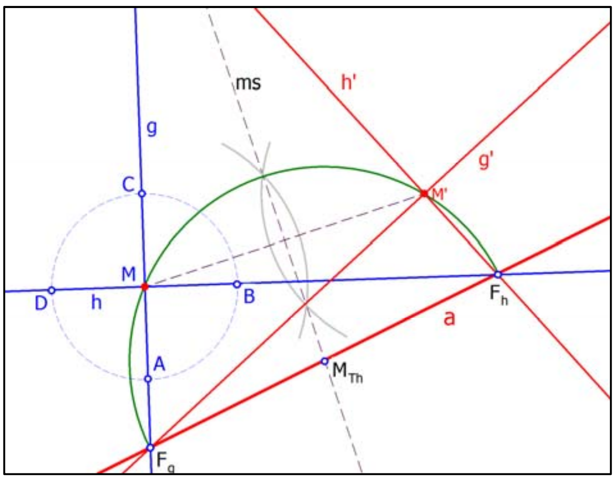
Beispiel 9 Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaars

Gegeben sind die Affinitätsachse $y = \frac{1}{2}x$, der Mittelpunkt $M(-3\,|\,2)$ des Kreises mit dem Radius 2 und der Bildpunkt $M'(3\,|\,4)$ von M, der zum Mittelpunkt der Ellipse werden soll.

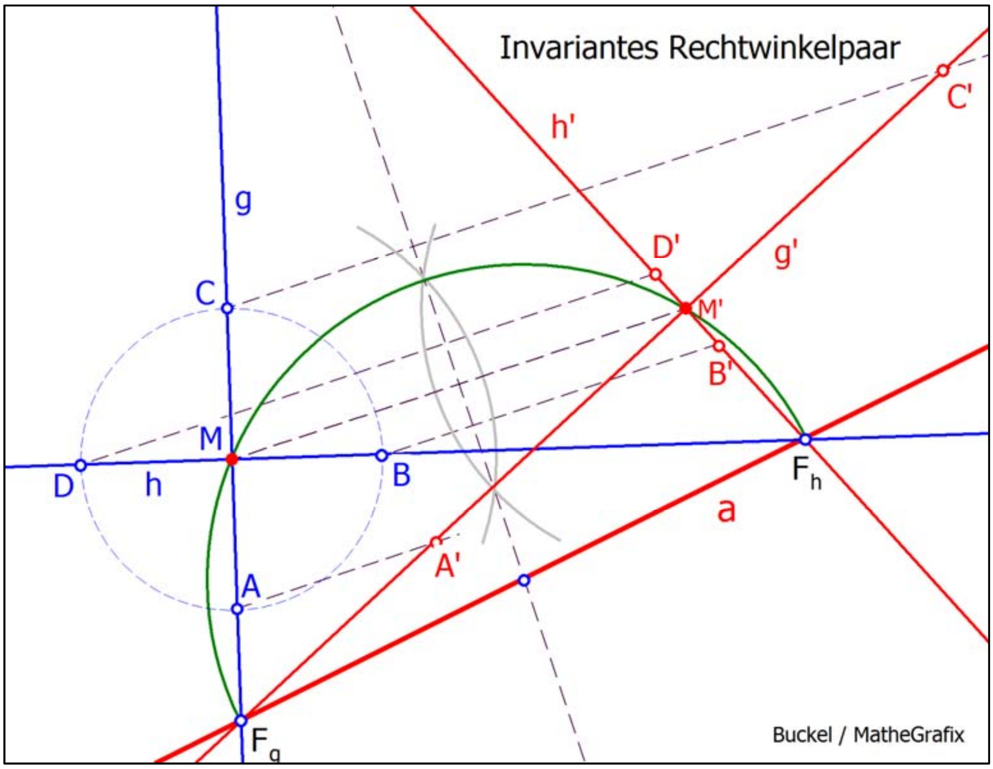
Wir müssen also die beiden durch M gehenden orthogonalen Geraden g und h finden, deren Bilder g' und h' durch M' gehen und ebenfalls orthogonal sind.

Dabei hilft uns der *Satz des Thales*, nach dem man „in einem Halbkreis rechte Winkel findet". Damit diese beiden rechten Winkel in M bzw. M' liegen, muss dieser Halbkreis durch M und M' gehen. Dessen Mittelpunkt muss auf der Mittelsenkrechten zu M und M' liegen. Deren Konstruktion erkennt man in der rechten Abbildung (zwei sich schneidende Kreisbögen). Die Mittelsenkrechte ms schneidet die Achse a im Mittelpunkt des **Thales-Halbkreises**. Dieser schneidet die Achse a in zwei Fixpunkten F_g und F_h. Mit $g = (F_gM)$ und $h = (F_hM)$ haben wir die beiden orthogonalen Kreisdurchmesser gefunden. Ihre Bilder g' und h' sind ebenfalls orthogonal und bilden daher die Ellipsendurchmesser.

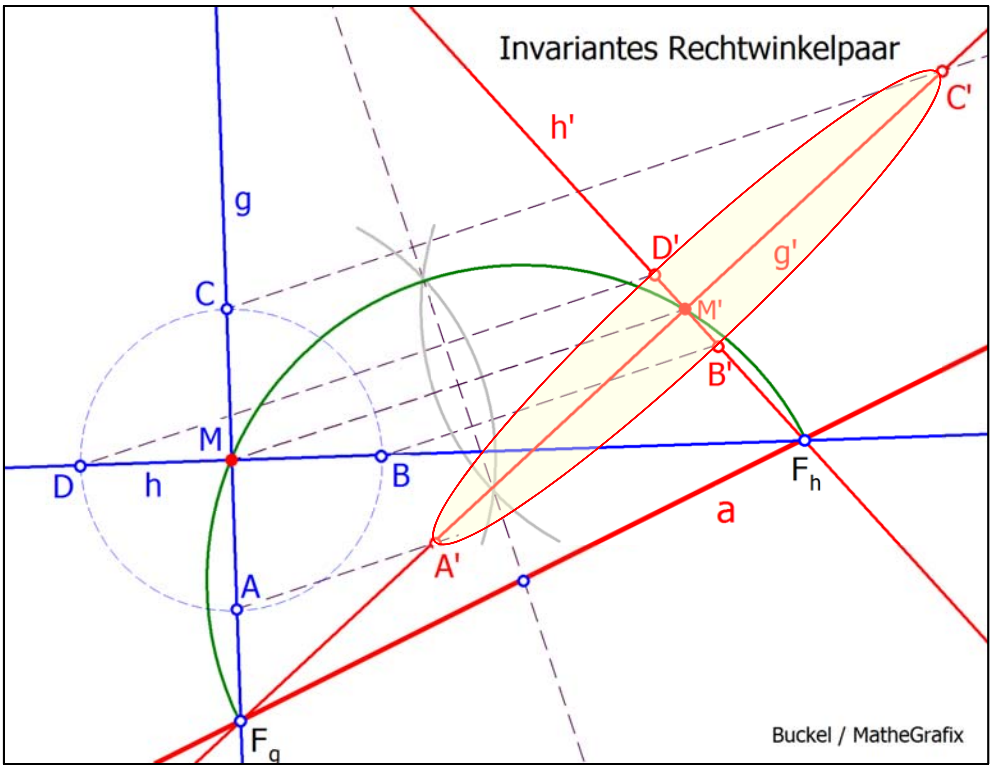




Wir haben also das invariante Rechtwinkelpaar konstruiert. Die Schnittpunkte von g und h mit dem Kreis ergeben die vier Kreisscheitel, die bei der affine Abbildung in die Ellipsenscheitel übergehen. Dazu muss man lediglich noch die parallelen Geraden zu (MM') (= Affinitätsrichtung) durch A, B, C und D einzeichnen und die Schnittpunkte A', B', C', D' auf den Bildgeraden entdecken.



Damit der Leser noch deutlicher die Lage der Ellipse erkennt, die das Bild des Kreises ist, habe ich eine schräg liegende Ellipse darübergelegt.



Zwischenaufgabe: Aufstellen der Abbildungsgleichung

Der Fixpunktgerade entnehme ich die Fixpunkte $O(0\,|\,0)$ und $Q(2\,|\,1)$, dann wissen wir noch, dass $M(-3\,|\,2)$ in $M'(3\,|\,4)$ abgebildet wird.

Mit dem Ansatz	$\vec{x}' = x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} + \vec{w}$	folgt dann durch Einsetzen von
$O(0\,|\,0)$ als Fixpunkt:	$\vec{o} = 0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{o}$	
$Q(2\,|\,1)$ als Fixpunkt:	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\vec{u} + \vec{v}$	(1)
M, M':	$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$	(2)
$(2)-2\cdot(1)$:	$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -7\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - 2\vec{u} = \begin{pmatrix}2-\frac{2}{7}\\1+\frac{4}{7}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\\frac{11}{7}\end{pmatrix}$	
Ergebnis:	$\vec{x}' = x\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\\frac{11}{7}\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{12}{7}\\-\frac{2}{7} & \frac{11}{7}\end{pmatrix}\cdot\vec{x}$.	

Jetzt die eigentliche Aufgabe: **Bestimmung des invarianten Rechtwinkelpaars.**

Intelligente Lösungen beginnen meist mit einem geeigneten Ansatz für die Rechnung.
Dieser besteht hier darin, dass man die beiden orthogonalen Richtungen (für die Achsen des Kreises) durch zwei orthogonale Vektoren ansetzt: $\vec{u} = \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}-s\\r\end{pmatrix}$. Wegen $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-s\\r\end{pmatrix} = -rs + rs = 0$ sind sie orthogonal.

Berechnung der Bildvektoren mit Hilfe der Abbildungsgleichungen:

$$\vec{u}' = r\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\\frac{11}{7}\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}r+12s\\-2r+11s\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}' = -s\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{2}{7}\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\\frac{11}{7}\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-s+12r\\2s+11r\end{pmatrix}$$

Diese Bildvektoren sollen auch orthogonal sein, also verlangen wir $\vec{u}_1'\cdot\vec{u}_2' = 0$:

$$\begin{pmatrix}r+12s\\-2r+11s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-s+12r\\2s+11r\end{pmatrix} = 0$$
$$(r+12s)(-s+12r) + (-2r+11s)(2s+11r) = 0$$
$$-rs - 12s^2 + 12r^2 + 144rs - 4rs + 22s^2 - 22r^2 + 121rs = 0$$
$$-10r^2 + 260rs + 10s^2 = 0 \qquad |:10$$
$$-r^2 + 26rs + s^2 = 0$$

Wähle $r = k, k \in \mathbb{R} \Rightarrow s^2 + 26k\cdot s - k^2 = 0$ mit

$$s_{1,2} = \frac{-26k \pm \sqrt{676k^2 + 4k^2}}{2} = \frac{-26k \pm \sqrt{680k^2}}{2} = \frac{-26k \pm 2k\sqrt{170}}{2} \approx \begin{cases}0{,}038\cdot k\\-26\cdot k\end{cases}$$

Ergebnis: Aus $s_1 \approx 0{,}038$ folgen die Vektoren $\vec{u}_1 \approx k\begin{pmatrix}1\\0{,}038\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 \approx k\begin{pmatrix}-0{,}038\\1\end{pmatrix}$

Aus $s_2 = -26\,k$ folgen $\vec{u}_2 \approx k\begin{pmatrix}1\\-26\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \approx k\begin{pmatrix}26\\1\end{pmatrix}$.

Achtung: $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ und $\vec{v}_1 = \vec{u}_2$, also gibt es nur ein Paar Eigenvektoren.

Zum Vergleich: Die Steigung der Geraden $g_2 = (MF_h)$ ergibt sich (aus der Zeichnung **abgelesen**) zu $m \approx 0{,}034$.

Ich habe hier zuerst die Zeichnung erstellt und dann daraus die Abbildungsgleichungen und das invariante Rechtwinkelpaar berechnet. Man sieht, dass dies kein schönes Ende genommen hat.

Beispiel 10, das zu einfacheren Ergebnissen führt.

Gegeben ist die Abbildung α durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Bestimme das invariante Rechtwinkelpaar.

1. Schritt: Berechnung der Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x}$ führt zu

$$\begin{Bmatrix} \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2} = x \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{2} = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2} = 0 \end{Bmatrix}$$

Fixpunktgerade: $\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2} = 0$ bzw. $\frac{3}{4}y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ bzw. $y = x + 2$

2. Schritt: Daher berechnet man sofort die **Affinitätsrichtung**:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right] - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nicht-Fixpunkte werden also in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet.

Weil diese Richtung parallel zur Affinitätsachse ist, liegt eine Scherung vor.

3. Schritt: Ansatz für das invariante Rechtwinkelpaar: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix}$.

Bildvektoren: $\vec{u}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4}r - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \end{pmatrix}$ und $\vec{v}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}s - \frac{3}{4}r \\ -\frac{3}{4}s + \frac{1}{4}r \end{pmatrix}$.

<u>Orthogonalitätsbedingung für die Bildvektoren:</u> $\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0$

Linke Seite: $\begin{pmatrix} \frac{7}{4}r - \frac{3}{4}s \\ \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}s - \frac{3}{4}r \\ -\frac{3}{4}s + \frac{1}{4}r \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{4}r - \frac{3}{4}s\right)\left(-\frac{7}{4}s - \frac{3}{4}r\right) + \left(\frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s\right)\left(-\frac{3}{4}s + \frac{1}{4}r\right)$

$$= \left[-\tfrac{49}{16}rs + \tfrac{21}{16}s^2 - \tfrac{21}{16}r^2 + \cancel{\tfrac{9}{16}rs} \right] + \left[-\cancel{\tfrac{9}{16}rs} - \tfrac{3}{16}s^2 + \tfrac{3}{16}r^2 + \tfrac{1}{16}rs \right]$$

$$= -\tfrac{18}{16}r^2 - \tfrac{48}{16}rs + \tfrac{18}{16}s^2 = \tfrac{6}{16} \cdot \left(-3r^2 - 8rs + 3s^2\right)$$

Lösung der Gleichung: $-3r^2 - 8rs + 3s^2 = 0$.

Wähle $r = k, k \in \mathbb{R} \Rightarrow 3s^2 - 8k \cdot s - 3k^2 = 0$ mit $s_{1,2} = \dfrac{8k \pm \sqrt{64k^2 + 36k^2}}{6} = \dfrac{8k \pm 10k}{6} = \begin{cases} 3k \\ -\frac{1}{3}k \end{cases}$

Lösungsvektoren für $s_1 = 3k$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3k \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungsvektoren für $s_2 = -\frac{1}{3}k$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -\frac{1}{3}k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}k \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{3}k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Beide Lösungen von s führen zu diesem **Rechtwinkelpaar**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

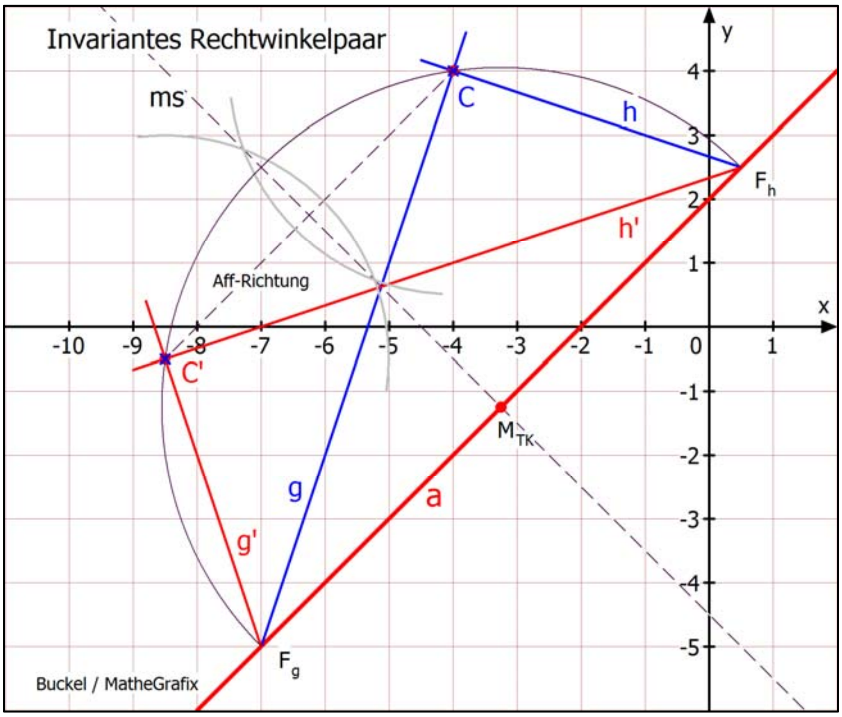
Berechnung der Bildvektoren:

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} - \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{4} \\ \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \frac{2}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

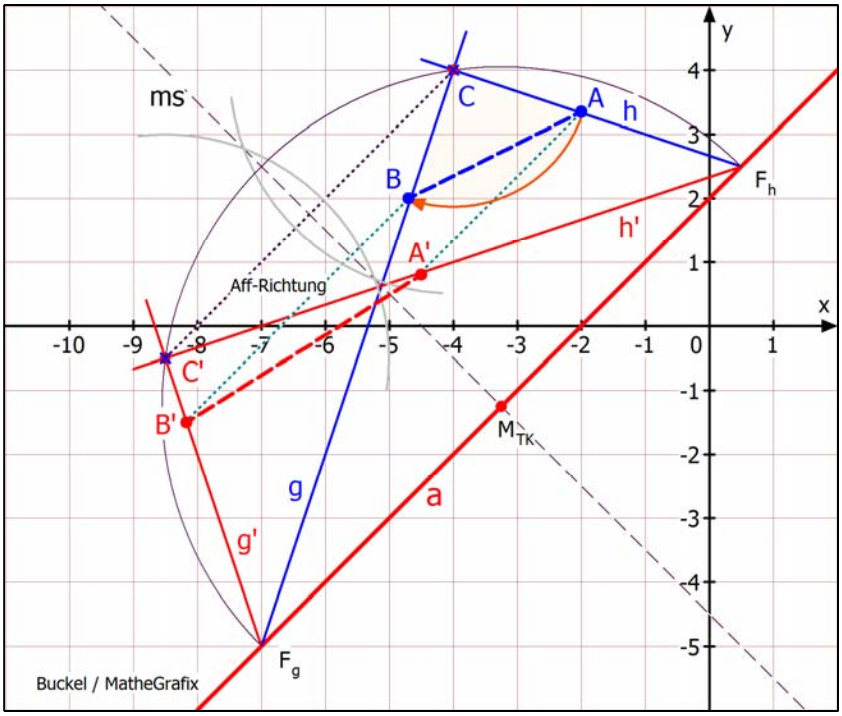
Dazu nun eine Konstruktion. Ich stelle mir diese Aufgabe:

Ich möchte ein rechtwinkliges Dreieck finden, an dessen Eckpunkt $C(-4\,|\,4)$ der rechte Winkel anliegt, dessen Katheten die Länge 3 LE haben, und das bei C' in ein rechtwinkliges Dreieck übergeht. Man errechnet: $\vec{c}' = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 - 3 + \frac{3}{2} \\ -3 + 1 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(-8{,}5\,|\,-0{,}5)$.

Gegeben ist die affine Abbildung α mit der Affinitätsachse $y = x + 2$, die $C(-4 \mid 4)$ auf $C'(-8{,}5 \mid -0{,}5)$ abbildet. Bestimme dazu das in variante Rechtwinkelpaar. (Beschreibung Seite 20/21.)



Konstruiere dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in C und den Katheten der Länge 2,1 cm und dazu das Bilddreieck.



Ein Kreisbogen um C mit Radius 2,1 cm schneidet das Rechtwinkelpaar h, g in A und B.
Die Parallelen zur Affinitätsrichtung durch A und B schneiden g' und h' in den Bildpunkten A' und B'.
Das Bilddreieck ist wie gewünscht bei C' rechtwinklig, aber die Dreiecke sind nicht kongruent!

Beispiel 11: Der Ausnahmefall: Senkrecht affine Abbildung

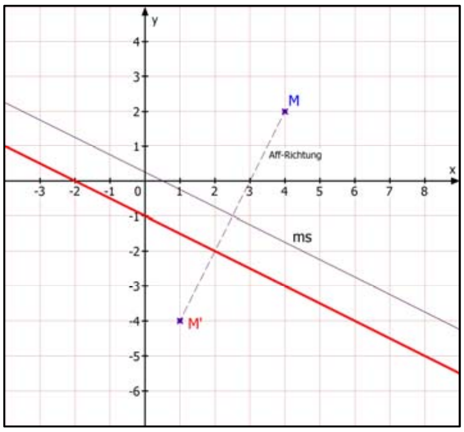
Gegeben ist die affine Abbildung α durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,6 \\ -0,6 & -0,2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,2 \end{pmatrix}$.

Information: es liegt eine senkrechte affine Abbildung vor.

Bestimme zeichnerisch und rechnerisch das invariante Rechtwinkelpaar.

Ich verwende den Kreismittelpunkt $M(4\,|\,2)$ und seinen Bildpunkt:

$$\vec{m}' = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,6 \\ -0,6 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M'(1\,|\,-4)$$

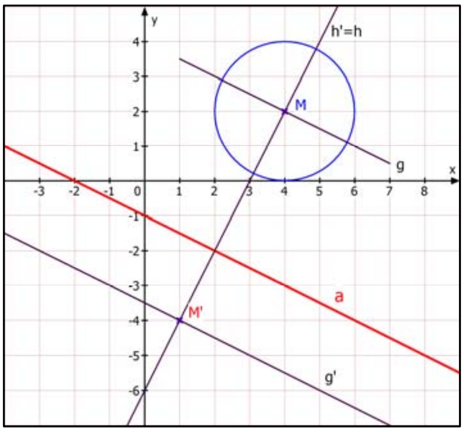


Beginnt man die Konstruktion wie zuvor gelernt, dann zeichnet man die Mittelsenkrechte ms zu MM' ein und bestimmt deren Schnittpunkt … Doch den gibt es nicht! Weil die Affinitätsrichtung senkrecht zur Achse ist, gilt dies auch für die Strecke MM', und folglich ist die Mittelsenkrechte ms parallel zur Achse. *Also versagt bei einer senkrecht affinen Abbildung die Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaars.*

So findet man hier das invariante Rechtwinkelpaar:

Es hat die Richtungen der Affinitätsachse und der Affinitätsrichtung, denn eine Parallele zu a durch M ist wieder parallel zu a, denn Parallelität bleibt bekanntlich erhalten und a ist also Fixpunktgerade fest.

Ferner ist jede Gerade in Affinitätsrichtung, die hier senkrecht zur Achse ist, eine Fixgerade. Daher kann man die beiden Rechtwinkelpaare g, h und g', h' sofort einzeichnen.



Damit entfällt bei senkrecht-affinen Abbildungen auch die komplizierte Berechnung des invarianten Rechtwinkelpaars.

Man kann die Richtung der Achse und der Affinitätsrichtung direkt übernehmen:

1. Schritt: **Berechnung der Fixpunkte:** $\vec{x}' = \vec{x}$ $\begin{Bmatrix} 0,7x - 0,6y - 0,6 = x \\ -0,6x - 0,2y - 1,2 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -0,3x - 0,6y = 0,6 \\ -0,6x - 1,2y = 1,2 \end{Bmatrix}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $-3x - 6y = 6$.

$\mathbf{y = -\frac{1}{2}x - 1}$ stellt die Fixpunktgerade (Affinitätsachse) dar.

2. Schritt: **Affinitätsrichtung**:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{x}' - \vec{x} = \left[x\begin{pmatrix} 0,7 \\ -0,6 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -0,6 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,2 \end{pmatrix} \right] - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= x\begin{pmatrix} -0,3 \\ -0,6 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,2 \end{pmatrix} = (-0,3x - 0,6y - 0,6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

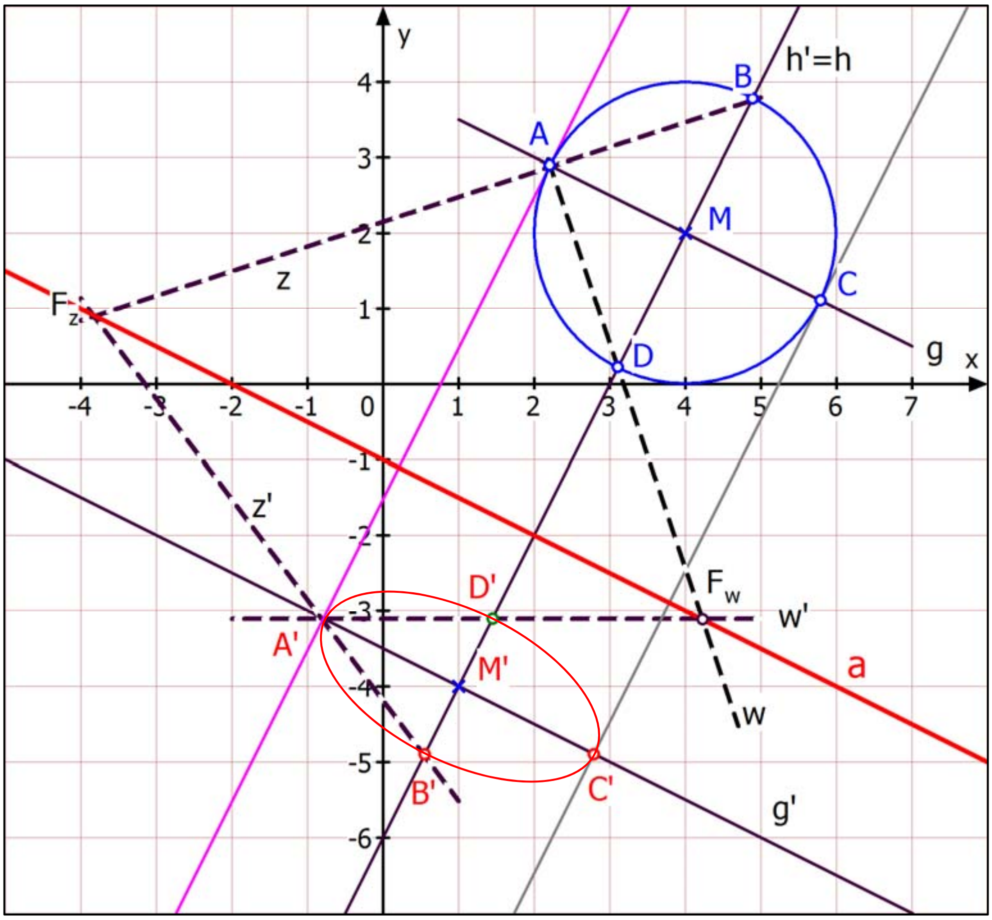
Ergebnis: Alle Punkte werden also in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ abgebildet, das ist orthogonal zur Achsenrichtung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nun die Konstruktion der Ellipsenscheitel

Um die **Kreisscheitel A und C abzubilden**, zeichnet man einfach die Parallelen zur Affinitätsrichtung (MM') durch A bzw. B. Diese schneiden die Gerade g‘ in A' und C'.

Mit Hilfe von A und A' konstruiere ich dann B': Die Gerade z = (AB) schneidet a im Fixpunkt F_z.
B' liegt auf der Bildgeraden z' durch F_z und A', und B' ist der Schnittpunkt von z' und h (= h').

Analog findet man D' durch die Gerade w = (AD) mit dem Fixpunkt F_w auf a. D' ist der Schnittpunkt von w' und h. Nun kennen wir also die Ellipsenscheite l A', B', C' und D'.



Ich habe – um eine möglichst hohe Genauigkeit zu erhalten, die Kreisscheitel und die Ellipsenscheitel mit TI Nspire CAS berechnet und füge für Interessierte hier einen Screenshot bei.

© Schnitt Kreis mit g: $y=-\frac{1}{2}x+4$

$\text{solve}\left((x-4)^2+\left(\frac{-1}{2}\cdot x+4-2\right)^2=4,x\right)$	$x=4-\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$ or $x=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}+4$
$\text{solve}\left((x-4)^2+\left(\frac{-1}{2}\cdot x+4-2\right)^2=4,x\right)$	$x=2.21115$ or $x=5.78885$
$\frac{-1}{2}\cdot 2.21+4$	2.895
$\frac{-1}{2}\cdot 5.79+4$	1.105

© Schnitt Kreis mit g: $y=2x-6$

$\text{solve}\left((x-4)^2+(2\cdot x-6-2)^2=4,x\right)$	$x=4-\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$ or $x=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}+4$
$\text{solve}\left((x-4)^2+(2\cdot x-6-2)^2=4,x\right)$	$x=3.10557$ or $x=4.89443$
$2\cdot 3.11-6$	0.22
$2\cdot 4.89-6$	3.78

© Kreisscheitel: A(2,21 | 2,90), B(4,89 | 3,78), C(5,79 | 1,11) und D (3,11 | 0,22)

© Berechnung der Ellipsenscheitel

$$\begin{bmatrix}0.7 & -0.6\\ -0.6 & -0.2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2.21\\ 2.9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.6\\ -1.2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-0.793\\ -3.106\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.7 & -0.6\\ -0.6 & -0.2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4.89\\ 3.78\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.6\\ -1.2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0.555\\ -4.89\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.7 & -0.6\\ -0.6 & -0.2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5.79\\ 1.11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.6\\ -1.2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2.787\\ -4.896\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.7 & -0.6\\ -0.6 & -0.2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3.11\\ 0.22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.6\\ -1.2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1.445\\ -3.11\end{bmatrix}$$

$\frac{3.78-2.9}{4.89-2.21}$	0.328358
$\text{solve}\left(\begin{cases}y=0.328\cdot(x-2.21)+2.9\\ y=\frac{-x}{2}-1\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=-3.83469$ and $y=0.917343$

© Fixpunkt F(z) (−3,835 | 0,917)

$\frac{0.22-2.9}{3.11-2.21}$	-2.97778
$\text{solve}\left(\begin{cases}y=-2.98\cdot(x-2.21)+2.9\\ y=\frac{-x}{2}-1\end{cases},\{x,y\}\right)$	$x=4.22815$ and $y=-3.11407$

© Fixpunkt F(w (4,228 | −3,114))

5 Beispielaufgaben mit Parametern

Nach diesen Einführungen und Beispielen zeige ich hier noch, wie Aufgaben aussehen können, bei denen die Abbildungsgleichungen einen Parameter enthalten. Es handelt sich um drei Abituraufgaben aus Baden-Württemberg.

Trainingsaufgabe 3 - (Abitur 1977) Originaltext leicht verändert

Durch die affinen Abbildungen α_t werden die Punkte $P(0|0)$, $Q(0|1)$, $R(1|0)$ auf die Punkte $P'(t+1|2)$, $Q'(t-1|t-1)$, $R'(2t+3|4)$ abgebildet.

a) Stelle die Abbildungsgleichungen auf.

Ergebnis: $\alpha_t: \begin{cases} x' = (t+2)x - 2y + t + 1 \\ y' = 2x + (t-3)y + 2 \end{cases}$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{2; -1\}$

Für welche Werte von t sind die Abbildungen α_t flächentreu?

b) Für welche Werte von t sind die Abbildungen α_t Achsenaffinitäten?

Bestimme für die Achsenaffinität mit $t > 0$ alle Fixgeraden.
Konstruiere für diese Achsenaffinität die Achse mit Hilfe der Punkte P, Q, R und ihrer Bildpunkte P', Q', R'. (LE 1 cm)
Die Konstruktion ist kurz zu begründen.

c) Durch Verknüpfung der beiden Abbildungen α_0 und α_3 ergibt sich die Abbildung $\gamma = \alpha_3 \circ \alpha_0$.
Bestimme die Abbildungsgleichungen von γ.
Zeige, dass γ genau 2 Fixgeraden besitzt.

Lösung Seite 47

Trainingsaufgabe 4 - (Abitur 1977) Originaltext leicht verändert

Eine affine Abbildung α_t ist gegeben durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5t & t \\ 2t & 4t \end{pmatrix} \vec{x}$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimme Fixpunkte, Eigenwerte , Eigenvektoren und Fixgeraden von α_t

b) Zeige, dass es zwei Werte von t gibt, für die α_t eine Achsenaffinität ist.

Gib für $t_1 = \frac{1}{3}$ die Achse, die Fixgeraden und das Affinitätsverhältnis an.

Konstruiere für $t_1 = \frac{1}{3}$ das Bild des Quadrats $O(0\,|\,0)$, $A(1\,|\,0)$, $B(1\,|\,1)$, $C(0\,|\,1)$ mit Hilfe der Achse und $B'(2\,|\,2)$. (Längeneinheit 2 cm)

c) Die Abbildung β_t sei zusammengesetzt aus α_t und einer anschließenden Verschiebung γ mit dem Schubvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von t hat β_t genau einen Fixpunkt, keine Fixpunkte, eine Fixpunktgerade?

d) α sei eine affine Abbildung mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x}$ und $ad - bx \neq 0$, γ eine Verschiebung mit dem Schubvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Zeige, dass $\gamma \circ \alpha$ genau dann einen einzigen Fixpunkt besitzt, wenn α nicht den Eigenwert 1 hat.

Lösung Seite 50

Trainingsaufgabe 5 - (Abitur 1978) Originaltext leicht geändert

Gegeben ist eine Menge M von affinen Abbildungen durch

$$\alpha_t : \begin{cases} x' = -x + \qquad y - 1 \\ y' = 2tx + (1-t)y + t \end{cases} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

a) Zeige:

1. Alle Abbildungen α_t haben dieselbe Fixpunktgerade.
2. Das Bild eines beliebigen vom Ursprung verschiedenen Punktes P der x-Achse ergibt sich durch Schrägspiegelung von P an der y-Achse mit anschließender Verschiebung um 1 nach links.

b) Das Parallelogramm ABCD mit $A(2{,}5 \mid 2{,}5)$, $B(4 \mid 0{,}6)$, $C(3{,}5 \mid -2{,}5)$, $D(2 \mid -0{,}6)$ und dem Mittelpunkt auf der x-Achse soll durch eine affine Abbildung $\alpha_{t_0} \in M$ so abgebildet werden, dass sein Bild eine Raute ist.
Konstruiere die Raute unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und beschreibe die wichtigsten Konstruktionsschritte. (Längeneinheit 1 cm).

Bestimme die Abbildungsgleichungen von α_{t_0}.

c) Eine Abbildung $\alpha_{t^*} \in M$ bildet die Geraden mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ auf Bildgeraden mit der Steigung $m' = 5$ ab.

Wie heißen die Gleichungen von α_{t^*}?

Zeige, dass α_{t^*} eine Scherung ist.

d) Unter welchen Bedingungen für t_1 und t_2 ist $\alpha_{t_1} \circ \alpha_{t_2}$ eine Achsenaffinität?

Lösung Seite 54

Lösungen

der Trainingsaufgaben

Lösung Trainingsaufgaben 1: Bestimme Fixpunkte und Fixgeraden (von Seite 21)

a) $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$

Fixpunkte: Weil die erste Matrixspalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lautet, ist die x-Achse Fixpunktgerade.

Fixgeradenbestimmung mit der Affinitätsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = x\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[x\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixgeraden sind also neben der Achse alle Geraden in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$**:** $y = -x + c, \ c \in \mathbb{R}$

Fixgeradenbestimmung mit Eigenvektoren

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 0 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-k)(2-k) = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, \ k_2 = 2$

Es handelt sich um eine **Parallelstreckung von a aus mit dem Faktor 2.**

Eigenvektoren zu $k_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1-\mathbf{1} & -1 \\ 0 & 2-\mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_2 = 0 \\ u_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = 0$

Da für u_1 keine Bedingung vorhanden ist, kann man u_1 frei wählen: $u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$.

Eigenvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$ (Achsenrichtung).

Eigenvektoren zu $k_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1-\mathbf{2} & -1 \\ 0 & 2-\mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -u_1 - u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow u_2 = -u_1$

Wähle $u_1 = s, \ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -s$.

Eigenvektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d. h. alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = 2\vec{v}$.

Ergebnis: Diese Abbildung hat die linear unabhängigen Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und ihre Vielfachen als Eigenvektor mit $\vec{u}' = \vec{u}$ und $\vec{v}' = 2\vec{v}$

Bestimmung der Fixgeraden:

Die x-Achse ist Fixpunktgerade in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}$.

Ferner sind alle Geraden in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Fixgeraden: $y = -x + c, \ c \in \mathbb{R}$, z. B. g und h.

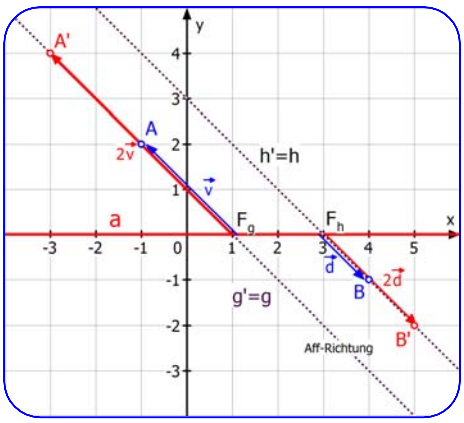
Beispiel dazu:

$A(-1|2) \to A'(-3|4)$, $B(4|-1) \to B'(5|-2)$

denn $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

und $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overrightarrow{F_gA'} = 2 \cdot \overrightarrow{F_gA}$ und $\overrightarrow{F_hB'} = 2 \cdot \overrightarrow{F_hB}$ (Eigenvektoren).



b) $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \iff \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}x + y + 1 = x \\ -\frac{1}{2}x + 2y + 1 = y \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}x + y + 1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x + y + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$

α **hat die Fixpunktgerade a:** $y = \frac{1}{2}x - 1$

Fixgeradenbestimmung mit der Affinitätsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = x\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = x\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}x + y + 1\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixgeraden sind also neben der Achse alle Geraden in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**:** $y = x + c, \ c \in \mathbb{R}$

Fixgeradenbestimmung mit Eigenvektoren

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - k & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 - k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - k & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 - k \end{vmatrix} = 0 \iff \left(\frac{1}{2} - k\right)(2 - k) + \frac{1}{2} = 0$

Eigenwerte: $k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{3}{2} = 0 \iff 2k^2 - 5k + 3 = 0 \iff k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

Es handelt sich um eine **Parallelstreckung von a aus mit dem Faktor $\frac{3}{2}$.**

Eigenvektoren zu k_1 = 1: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}u_1 + u_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}u_1 + u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \iff u_1 = 2u_2$

Wähle $u_2 = r, \ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r \ u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$. Das ergibt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren sind somit alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \vec{u}$

Eigenvektoren zu k_2 = $\frac{3}{2}$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{matrix} -u_1 + u_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \iff u_2 = u_1$

Wähle $u_1 = s, \ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = s \ u_1 = r, \ r \in \mathbb{R}$. Das ergibt $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren sind somit alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v}' = \frac{3}{2}\vec{v}$

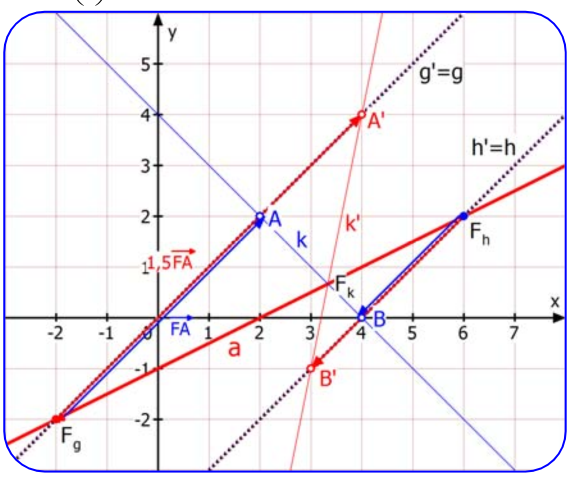
Fixgeraden: Die Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist Fixpunktgerade in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}$.

Ferner sind alle Geraden in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Fixgeraden: $y = x + c, \ c \in \mathbb{R}$

Punktbeispiele dazu:

Die Geraden $g = (AA')$ und $h = (BB')$ sind Fixgeraden, weil mit jedem Punkt von ihnen auch der Bildpunkt darauf liegt, und zwar gilt: $\overrightarrow{F_gA'} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{F_gA}$ sowie $\overrightarrow{F_hB'} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{F_hB}$.

Ich habe übrigens noch die Gerade $k = (AB)$ sowie ihre Bildgerade $k' = (A'B')$ eingetragen. k und k' schneiden sich auf der Achse in F_k.



c) $\alpha:$ $\vec{x}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\vec{x}$

Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}y = x \\ -\frac{2}{3}x + 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{3}{2}y = 0 \\ -\frac{2}{3}x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x$ **Fixpunktgerade.**

Fixgeradenbestimmung mit der Affinitätsrichtung:

$$\overrightarrow{PP'} = x\begin{pmatrix}0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix} - \left[x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = x\begin{pmatrix}-1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-\frac{6}{6}\\-\frac{4}{6}\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}\frac{9}{6}\\\frac{6}{6}\end{pmatrix} = -\frac{2}{6}x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{6}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{6}x + \frac{3}{6}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

Fixgeraden sind also neben der Achse alle Geraden in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$**:** $y = \frac{2}{3}x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Fixgeradenbestimmung mit Eigenvektoren

Eigenwertsystem: $\begin{pmatrix}-k & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix}-k & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2-k\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(2-k)+1=0 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0$

Eigenwerte; $k = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$

Ergebnis: Eine Achsenaffinität mit dem einzigen Eigenwert 1 ist eine **Scherung**.

Eigenvektoren zu k = 1: $\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-u_1 + \frac{3}{2}u_2 = 0\\ -\frac{2}{3}u_1 + u_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow u_2 = \frac{2}{3}u_1$

Wähle $u_1 = 3\cdot r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2r$. Das ergibt $\vec{u} = \begin{pmatrix}3r\\2r\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Diese Abbildung hat als einzigen Eigenvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und seine Vielfachen mit $\vec{u}' = \vec{u}$

Fixgeraden: Die Gerade $y = \frac{2}{3}x$ ist Fixpunktgerade in Richtung des Eigenvektors $\vec{u}$.
Ferner sind alle Parallelen dazu Fixgeraden: $y = \frac{2}{3}x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Punktbeispiele dazu:

$A(-3\,|\,1) \to A'(1{,}5\,|\,4)$,
$B(-2\,|\,\frac{2}{3}) \to B'(1\,|\,\frac{8}{3})$,
$C(3\,|\,-1) \to C'(-1{,}5\,|\,-4)$,

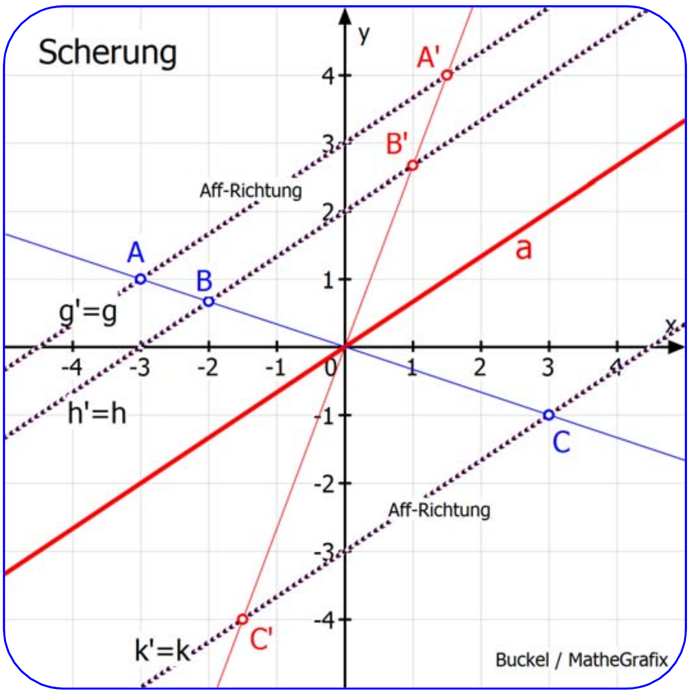
denn

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-4\end{pmatrix}$$

Die Geraden $g = (AA')$, $h = (BB')$ und $k = (CC')$ sind Fixgeraden.



Trainingsaufgabe 2 (von Seite 26)

a) Wie lautet die Gleichung dieser Abbildung, deren Affinitätsachse die Gleichung $y = 2x - 2$ lautet, und die $A(1{,}5 \mid 4)$ auf $A'(3{,}5 \mid 2)$ abbildet

Im Text 21220 wird gezeigt, wie man aus drei Paaren Punkt/Bildpunkt die vektorielle Abbildungsgleichung erstellt. Dazu wählt man zwei Fixpunkte, etwa $F_1(0 \mid -2)$ und $F_2(1 \mid 0)$ aus

Ansatz: $\vec{x}' = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + \vec{w}$

A, A' einsetzen: $\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \vec{u} + 4 \cdot \vec{v} + \vec{w}$ (1)

$F_1' = F_1$ einsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{v} + \vec{w}$ (2)

$F_2' = F_2$ einsetzen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{w}$ (3)

(1) – (3): $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \vec{u} + 4 \cdot \vec{v}$ (4)

(2) – (3): $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u} - 2\vec{v}$ (5)

$(4) + 2 \cdot (5)$: $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = -1{,}5 \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

In (5): $2\vec{v} = -\vec{u} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

In (3): $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Ergebnis: $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

b) Die Gleichung von g lautet $y = x + 4$. Welche Gleichung hat die Bildgerade? Berechne den Schnittpunkt von g und g' und zeige, dass dieser auf der Achse liegt.

<u>1. Möglichkeit:</u> Verwendung einer Vektorgleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bildgerade g' : $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Umgerechnet: $x = 4 + \frac{1}{3} r \Rightarrow r = 3x - 12$

In $y = \frac{5}{3} r \Rightarrow y = \frac{5}{3}(3x - 12) = 5x - 20$

<u>2. Möglichkeit:</u> g' : $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + (x+4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das ist dieselbe vektorielle Geradengleichung nur mit anderen Bezeichnungen.

$y = \frac{5 \cdot r}{3} + \frac{1}{3} \mid r = 3 \cdot x - 12$ $\quad y = 5 \cdot x - \frac{59}{3}$

$\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{r}{3}+4 \\ \frac{5 \cdot r}{3} \end{bmatrix}$

$x \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} + (x+4) \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{x}{3}+4 \\ \frac{5 \cdot x}{3} \end{bmatrix}$

© Umrechnung: Vektorgleichung in lineare Gleichung;

$\text{solve}\left(x = \frac{r}{3} + 4, r \right)$ $\quad r = 3 \cdot x - 12$

$y = \frac{5 \cdot r}{3} \mid r = 3 \cdot x - 12$ $\quad y = 5 \cdot (x - 4)$

Berechnung des Schnittpunkts Q von g und g':

ans

Vektoriell:

$$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} r-\frac{1}{3}s=4 & (1)\\ r-\frac{5}{3}s=-4 & (2)\end{cases}$$

(1) – (2): $\frac{4}{3}s=8$

$s=6$

Es folgt: $\vec{q}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

Linear:

$x+4=5x-20$

$24=4x$

$x_Q=6$

$y_Q=6+4=10$

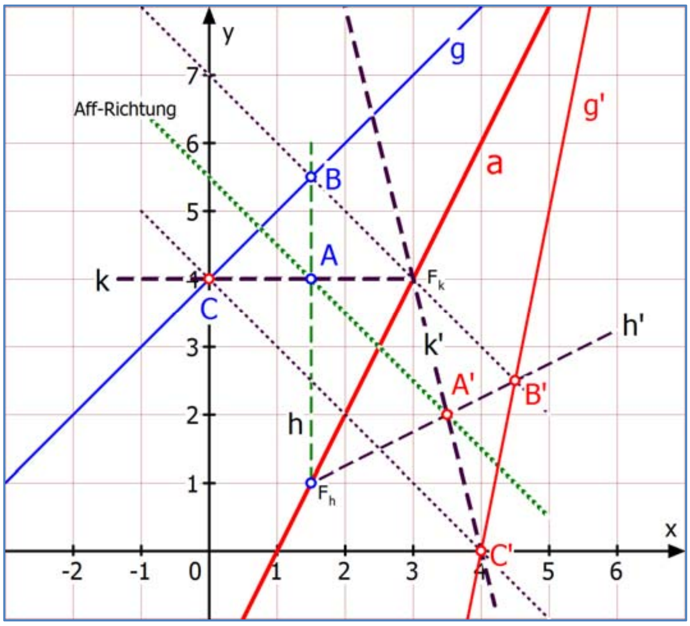
$Q(6\,|\,10)$

Die Achse hat die Gleichung $y=2x-2$.

Die Punktprobe mit Q: $\boxed{10}=2\cdot\boxed{6}-2$ ist eine wahre Aussage.

Also schneiden sich g und g' auf der Achse.

Hinweis: Es wurde auf Seite 17 bewiesen, dass sich eine Gerade mit ihrer Bildgeraden stets auf der Affinitätsachse schneiden. Dies hier war also nur eine Rechenübung und keine neue Erkenntnis.



c) Konstruktion der Bildgeraden

Grundsätzliche Überlegungen:

Da sich hier g und a nicht sichtbar schneiden, muss man zu zwei selbst gewählten Punkten B und C die Bildpunkte (mittels A, A') konstruieren.

Konstruktion von B':

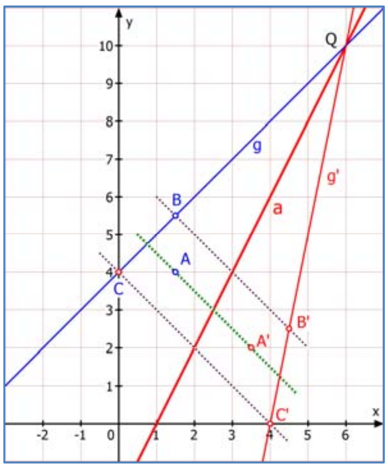
Die Hilfsgerade $h=(AB)$ schneidet a im Fixpunkt F_h. Die Bildgerade h' geht durch F_h und A'. Die Gerade in Affinitätsrichtung durch B schneidet h' in B'.

Konstruktion von C':

Die Hilfsgerade $k=(AC)$ schneidet a im Fixpunkt F_k. Die Bildgerade k' geht durch F_k und A'. Die Gerade in Affinitätsrichtung durch C schneidet k' in C'.

$(B'C')$ ist dann die gesuchte Bildgerade g'.

g und g' schneiden sich in $Q(6\,|\,10)$, den man auf einer großen Zeichnung bzw. bei kleinem Maßstab noch sehen kann.



Trainingsaufgabe 3 (von Seite 38)

Durch die affinen Abbildungen α_t werden die Punkte $P(0|0)$, $Q(0|1)$, $R(1|0)$ auf die Punkte $P'(t+1|2)$, $Q'(t-1|t-1)$, $R'(2t+3|4)$ abgebildet.

a) Stelle die Abbildungsgleichungen auf.

Ansatz: $\vec{x}' = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} + \vec{c}$

P, P': $\begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{c}$

Q, Q': $\begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{c} \quad\Rightarrow\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \end{pmatrix}$

R, R': $\begin{pmatrix} 2t+3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{c} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2t+3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ergebnis: α_t: $\vec{x}' = x\cdot\begin{pmatrix} t+2 \\ 2 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x}' = \begin{pmatrix} t+2 & -2 \\ 2 & t-3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nun muss man darauf achten, dass die Determinante nicht Null wird.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t+2 & -2 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = (t+2)(t-3)+4 = t^2 - t - 2$$

$\det(A) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$. Also lautet die Zusatzbedingung: $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

Für welche Werte von t sind die Abbildungen α_t flächentreu?

WISSEN: Eine Abbildung ist genau dann **flächentreu**, wenn ihre Determinante ± 1 ist.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t+2 & -2 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = (t+2)(t-3)+4 = t^2 + 2t - 3t - 6 + 4 = t^2 - t - 2$$

Bedingung: $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$

$t^2 - t - 2 = 1$ | $t^2 - t - 2 = -1$

$t^2 - t - 3 = 0$ | $t^2 - t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$ | $t_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

b) Für welche Werte von t sind die Abbildungen α_t Achsenaffinitäten?

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$

$$x\cdot\begin{pmatrix} t+2 \\ 2 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ t-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. $\begin{Bmatrix} (t+2)x - 2y + t + 1 = x \\ 2x + (t-3)y + 2 = y \end{Bmatrix}$

bzw. $\begin{Bmatrix} (t+1)x - 2y = -t-1 \\ 2x + (t-4)y = -2 \end{Bmatrix}$ (1)

Für unendlich viele Lösungen (Fixpunkte) muss die Determinante 0 sein:

$$\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 2 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (t+1)(t-4)+4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2 - 3t = 0$$

$t \cdot (t-3) = 0$ führt zu $\quad t_1 = 0$ und $t_2 = 3$.

Da es in diesem Fall aber auch zu keinen Fixpunkten kommen kann, muss man diese Werte in (1) einsetzen: $t_1 = 0$: $\left\{\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ 2x-4y=-2 \end{array}\right\}$ führt zur Achse $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$t_2 = 3$: $\left\{\begin{array}{l} 4x-2y=-4 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ führt zur Achse $y = 2x+2$

Bestimme für die Achsenaffinität mit $t > 0$ alle Fixgeraden.

Für t = 3 gilt: $\quad \alpha_3$: $\vec{x}' = x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

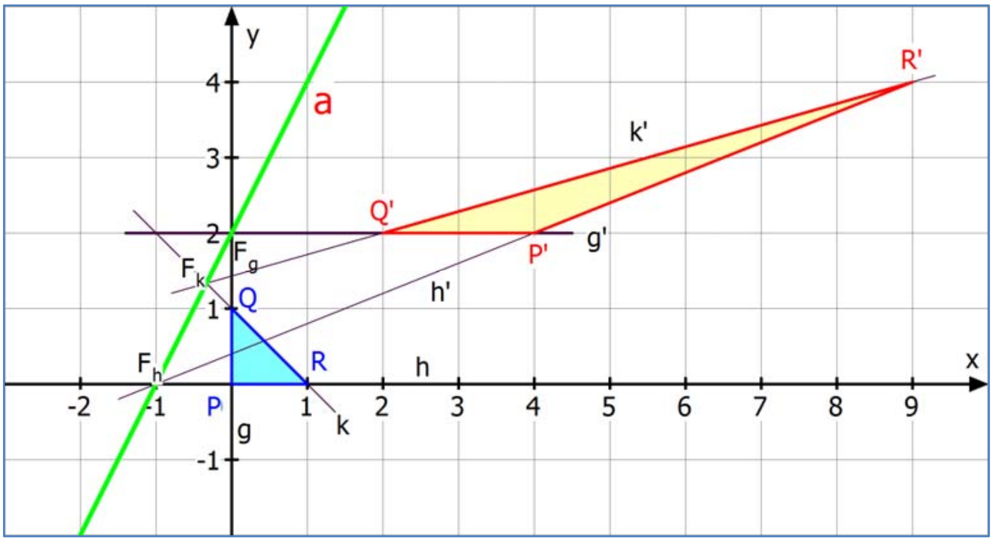
Affinitätsrichtung: $\overrightarrow{PP'} = x \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PP'} = 2x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2x - y + 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also werden alle Punkte. die nicht auf der Achse liegen, für die also $2x - y + 2 \neq 0$ ist, in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet. Jeder Gerade in dieser Richtung ist also Fixgerade.

Die Schar der Fixgeraden hat die Gleichung: $\quad y = -\frac{1}{2}x + c, \; c \in \mathbb{R}$

Konstruiere für diese Achsenaffinität die Achse mit Hilfe der Punkte P, Q, R und ihrer Bildpunkte P', Q', R' (LE 1 cm). Die Konstruktion ist kurz zu begründen.



Konstruktionsbegründung:

Die Gerade g = (PQ) und ihr Bild $g' = (P'Q')$ schneiden sich in einem Fixpunkt F_g.

Die Gerade h = (PR) und ihr Bild $h' = (P'R')$ schneiden sich in einem Fixpunkt F_h.

Die Gerade k = (QR) und ihr Bild $k' = (Q'R')$ schneiden sich in einem Fixpunkt F_k.

Diese Fixpunkte liegen auf der Achse a. Es genügen folglich zwei dieser Fixpunkte zum Zeichnen der Achse.

c) Durch Verknüpfung der beiden Abbildungen α_0 und α_3 ergibt sich die Abbildung $\gamma = \alpha_3 \circ \alpha_0$. Bestimme die Abbildungsgleichungen von γ. Zeige, dass γ genau 2 Fixgeraden besitzt.

: α_0: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und α_3: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\vec{x}' + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\gamma = \alpha_3 \circ \alpha_0$: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}'' = x\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Fixpunktbedingung: $\vec{x}'' = \vec{x}$

$$x\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 6x - 4y + 5 = x \\ 4x - 4y + 4 = y \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 5x - 4y = -5 & (1) \\ 4x - 5y = -4 & (2) \end{matrix}\right\}$$

$4 \cdot (1) - 5 \cdot (2)$: $9y = 0 \Rightarrow y_F = 0$

In (1): $5x = -5 \Rightarrow x_F = -1$

Ergebnis: γ hat den Fixpunkt $F(-1|0)$.

Eigenvektoren sind nicht-triviale Lösungen von $\begin{pmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Dazu muss die Determinante Null werden: Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 6-k & -4 \\ 4 & -4-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (6-k)(-4-k) + 16 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \quad \text{(Eigenwerte)}$$

Eigenvektoren zu k_1 = 4: $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2u_1 - 4u_2 = 0 \\ 4u_1 - 8u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $u_1 - 2u_2 = 0$.

Wähle $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = 2r$

Eigenvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 4 \cdot \vec{u}$.

Eigenvektoren zu k_1 = -2: $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 8u_1 - 4u_2 = 0 \\ 4u_1 - 2u_2 = 0 \end{matrix}\right\}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $2u_1 - u_2 = 0$.

Wähle $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2s$

Eigenvektoren: $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = -2 \cdot \vec{u}$.

Ergebnis: Die beiden Geraden durch F in Richtung der Eigenvektoren sind die Fixgeraden von γ:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. γ ist eine **Euler-Affinität** (21220 Seite 34).

Trainingsaufgabe 4 (von Seite 39)

Eine affine Abbildung α_t ist gegeben durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5t & t \\ 2t & 4t \end{pmatrix}\vec{x}$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimme Fixpunkte, Eigenwerte , Eigenvektoren und Fixgeraden von α_t

Fixpunktbedingung: $\vec{x}' = \vec{x}$ d. h.

$$x\begin{pmatrix} 5t \\ 2t \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5tx + ty = x \\ 2tx + 4ty = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (5t-1)x & ty = 0 \\ 2tx + (4t-1)y = 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

Lösung des Gleichungssystems mit Determinanten (Cramersche Regel):

$$D = \begin{vmatrix} 5t-1 & t \\ 2t & 4t-1 \end{vmatrix} = (5t-1)(4t-1) - 2t^2 = 20t^2 - 4t - 5t + 1 - 2t^2 = 18t^2 - 9t + 1$$

Wann ist D = 0?

$$18t^2 - 9t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{36} = \frac{9 \pm 3}{36} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$$

Untersuchung des Ergebnisses $t_1 = \frac{1}{3}$:

Aus (*) wird damit $\begin{Bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \end{Bmatrix}$ d. h. $2x + y = 0$ bzw. $y = -2x$ ist Fixpunktgerade.

Untersuchung des Ergebnisses $t_1 = \frac{1}{6}$:

Aus (*) wird damit $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = 0 \end{Bmatrix}$ Beide Gleichungen sind Vielfache von $-x + y = 0$

d. h. y = x ist Fixpunktgerade.

Für $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$ ist die Nennerdeterminante $D \neq 0$.

Weil ein homogenes Gleichungssystem vorliegt, sind beide Zählerdeterminanten $D_x = 0$ und $D_y = 0$, Die zugehörigen Abbildungen haben den Ursprung als einzigen Fixpunkt.

Bestimmung der Eigenvektoren als nicht-triviale Lösungen des Systems $\begin{pmatrix} 5t-k & t \\ 2t & 4t-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o}$

Dazu muss die Determinante Null werden: Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 5t-k & t \\ 2t & 4t-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (5t-k)(4t-k) - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 9tk + 18t^2 = 0$$

mit $k_{1,2} = \frac{9t \pm \sqrt{81t^2 - 72t^2}}{2} = \frac{9t \pm 3t}{2} = \begin{cases} 6t \\ 3t \end{cases}$

Untersuchung des Ergebnisses für $t_1 = \frac{1}{3}$: Eigenwerte sind k_1 =2 und k_2 = 1.

k_2 = 1 gehört zur Achse $y = -2x$

k_1 = 2 gehört zur Affinitätsrichtung mit dem Eigenvektor aus

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} - 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_2 = 0 \\ \frac{2}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $u_1 - u_2 = 0$.

Wähle $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = r$ Eigenvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 2\vec{u}$.

Fixgeraden sind daher neben der Achse noch alle Geraden in Richtung $\vec{u}$,

also mit der Gleichung $y = x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Untersuchung des Ergebnisses für $t_1 = \frac{1}{6}$**:** Eigenwerte sind $k_1 = 1$ und $k_2 = \frac{1}{2}$.

$k_1 = 1$ gehört zur Achse $y = x$

$k_1 = \frac{1}{2}$ gehört zur Affinitätsrichtung mit dem Eigenvektor aus

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{6}-\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{6}u_2 = 0 \\ \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{6}u_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $2u_1 + u_2 = 0$.

Wähle $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = 2s$ Eigenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = \frac{1}{2}\vec{u}$.

Fixgeraden sind daher neben der Achse noch alle Geraden in Richtung $\vec{v}$,

also mit der Gleichung $y = 2x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Untersuchung des Ergebnisses für $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$**:** Eigenwerte sind $k_1 = 6t$ und $k_2 = 3t$.

Eigenvektoren zu $k_1 = 6t$: $\begin{pmatrix} -t & t \\ 2t & -2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} -tu_1 + tu_2 = 0 & (1) \\ 2tu_1 - 2tu_2 = 0 & (2) \end{Bmatrix}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $u_1 - u_2 = 0$.

Wähle $u_2 = r,\ r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = r$. Eigenvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 6t \cdot \vec{u}$.

Eigenvektoren zu $k_1 = 3t$: $\begin{pmatrix} 2t & t \\ 2t & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 2tu_1 + tu_2 = 0 \\ 2tu_1 + tu_2 = 0 \end{Bmatrix}$

Beide Gleichungen sind Vielfache von $2u_1 + u_2 = 0$.

Wähle $u_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_2 = -2s$. Eigenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}' = 3t \cdot \vec{u}$.

In all diesen Fällen liegt also genau ein Fixpunkt mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren vor, also sind es **Euler-Affinitäten** mit je zwei Fixgeraden durch den Fixpunkt $O(0\,|\,0)$:

$$\vec{x} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw. $y = x + 1$ und $y = 2x - 1$

b) Zeige, dass es zwei Werte von t gibt, für die α_t eine Achsenaffinität ist.
Gib für $t_1 = \frac{1}{3}$ die Achse, die Fixgeraden und das Affinitätsverhältnis an.

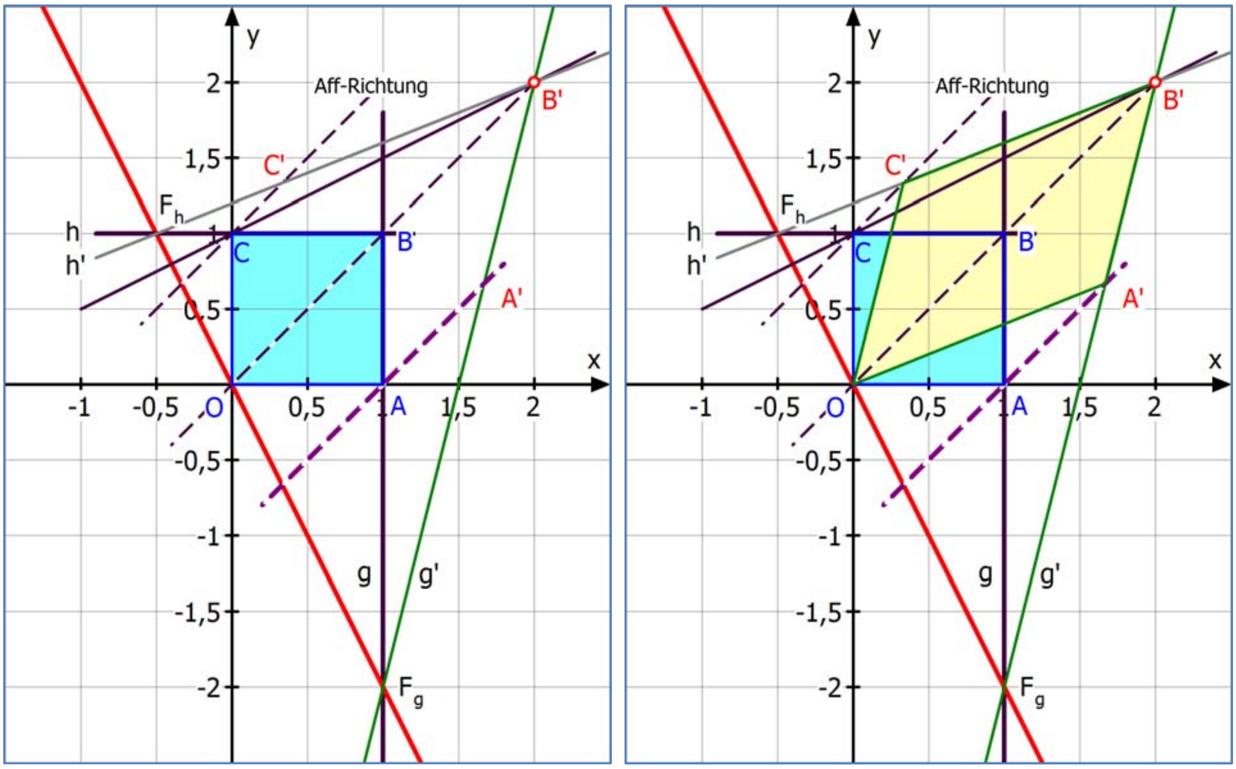
Dies wurde bei a) schon erledigt. Es sind die Werte $t_1 = \frac{1}{3}$ und $t_2 = \frac{1}{6}$.

Hier die Ergebnisse für $t_1 = \frac{1}{3}$**:**

$y = -2x$ ist Fixpunktgerade (Achse), die Fixgeraden sind neben der Achse noch alle Geraden in Affinitätsrichtung, d. h. in Richtung des Eigenvektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $y = x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Das Affinitätsverhältnis ist der zu $\vec{u}$ gehörende Eigenwert k = 2.
Er gibt an, dass alle Punkt im Verhältnis 2:1 von der Achse weggestreckt werden, und zwar auf der jeweiligen Fixgeraden, auf der er liegt.

Konstruiere für $t_1 = \frac{1}{3}$ das Bild des Quadrats $O(0|0)$, $A(1|0)$, $B(1|1)$, $C(0|1)$ mit Hilfe der Achse und $B'(2|2)$. (Längeneinheit 2 cm)



Konstruktionsbeschreibung:

Die Gerade g = (AB) schneidet die Achse a im Fixpunkt F_g. Die Bildgerade ist $g' = (F_g B')$.

Die Gerade h = (CB) schneidet die Achse a im Fixpunkt F_h. Die Bildgerade ist $h' = (F_h B')$.

Die Parallelen zu (BB') (= Affinitätsrichtung) durch A und C schneiden g' und h' in A' und C'.

c) Die Abbildung β_t sei zusammengesetzt aus α_t und einer anschließenden Verschiebung γ mit dem Schubvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von t hat β_t genau einen Fixpunkt, keine Fixpunkte, eine Fixpunktgerade?

$$\alpha_t: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 5t & t \\ 2t & 4t \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{und} \quad \gamma: \quad \vec{x}'' = \vec{x}' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_t = \gamma \circ \alpha_t: \qquad \vec{x}'' = \begin{pmatrix} 5t & t \\ 2t & 4t \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunktbed.: $\vec{x}'' = \vec{x}$ d. h. $\begin{Bmatrix} 5tx + ty + 1 = x \\ 2tx + 4ty + 1 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (5t-1)x + ty = -1 \\ 2tx + (4t-1)y = -1 \end{Bmatrix}$

Damit dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat, muss seine Determinante ungleich 0 sein:

$$\begin{vmatrix} 5t-1 & t \\ 2t & 4t-1 \end{vmatrix} = (5t-1)(4t-1) - 2t^2 = 18t^2 - 9t + 1$$

Wann ist det(A) = 0 ? $\quad t_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-72}}{36} = \dfrac{9 \pm 3}{36} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{cases}$

Also gibt es für $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0\}$ genau einen Fixpunkt.

(t = 0 ist von vorne herein ausgeschglossen!)

Bleiben noch die beiden Ausnahmefälle zu untersuchen:

$$\begin{Bmatrix} 5tx + ty + 1 = x \\ 2tx + 4ty + 1 = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (5t-1)x + ty = -1 \\ 2tx + (4t-1)y = -1 \end{Bmatrix}$$

Für $t_1 = \frac{1}{3}$: $\begin{Bmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = -1 \end{Bmatrix}$ Daraus folgt die Fixpunktgerade $y = -2x - 3$

Für $t_2 = \frac{1}{6}$: $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y = -1 & (1) \\ \frac{2}{6}x - \frac{2}{6}y = -1 & (2) \end{Bmatrix}$ Durch $(2) + 2 \cdot (1)$ erhält man $0 = -3$

Dieser Widerspruch widerlegt die Annahme, dass es in diesem Fall Fixpunkte gibt.

d) α sei eine affine Abbildung mit $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x}$ und $ad - bx \neq 0$, γ eine Verschiebung mit dem Schubvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\gamma \circ \alpha$ genau dann einen einzigen Fixpunkt besitzt, wenn α nicht den Eigenwert 1 hat.

Zuerst α: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x}$, dann γ: $\vec{x}'' = \vec{x}' + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Verkettet: $\vec{x}'' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Fixpunktbedingung: $x'' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} ax + cy + u = x \\ bx + dy + v = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (a-1)x + cy - u \\ bx + (d-1)y = -v \end{Bmatrix}$

Diese Gleichung hat genau eine eindeutige Lösung, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

$$\begin{vmatrix} a-1 & c \\ b & d-1 \end{vmatrix} = (a-1)(d-1) - bc \qquad \text{(FP)}$$

Eigenwerte berechnet man aus der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a-k & c \\ b & d-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-k)(d-k) - bc = 0 \qquad \text{(ChGl)}$$

Wenn nun der Eigenwert k = 1 existiert, dann lautet (ChGl): $(a-1)(d-1) - bc = 0$

Und dann wird auch die Determinante in (FP) gleich Null. Dann aber kann es keinen eindeutigen Fixpunkt geben.

Trainingsaufgabe 5 (von Seite 40)

Gegeben ist eine Menge M von affinen Abbildungen durch

$$\alpha_t : \begin{Bmatrix} x' = -x + \quad y - 1 \\ y' = 2tx + (1-t)y + t \end{Bmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \text{oder:} \quad \vec{x}' = x\begin{pmatrix}-1\\2t\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1-t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix}$$

a) Zeige: Alle Abbildungen α_t haben dieselbe Fixpunktgerade.

Bed. für Fixpunkte: $\vec{x}' = \vec{x} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -x + \quad y - 1 = x \\ 2tx + (1-t)y + t = y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = \ \ 2x + 1 & (1) \\ -ty = -2tx - t & (2) \end{Bmatrix}$

(2) ist das (-t)-fache von (1) und daher entbehrlich.

Alle Punkte, welche die Gleichung (1) erfüllen, sind also Fixpunkte.

(1) stellt die Fixpunktgerade dar, die unabhängig von t gilt: $\mathbf{y = 2x + 1}$

Zeige: Das Bild eines beliebigen vom Ursprung verschiedenen Punktes P der x-Achse ergibt sich durch Schrägspiegelung von P an der y-Achse mit anschließender Verschiebung um 1 nach links.

$P(u\,|\,0)$ mit $u \neq 0$ liegt auf der x-Achse. Sein Bildpunkt hat den Ortsvektor

$$\vec{x}' = \mathbf{u} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2t\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1-t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u-1\\2tu+t\end{pmatrix}: \qquad P'(-u-1\,|\,2tu+t) \qquad (*)$$

*Nun muss man die Gleichung einer **Schrägspiegelung an der y-Achse** aufstellen können.*

WISSEN: Eine affine Abbildung mit der y-Achse als Affinitätsachse hat diese Abbildungsgleichung:

$\vec{x}' = \begin{pmatrix}a_1 & \mathbf{0}\\a_2 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \cdot \vec{x}$. Eine Schrägspiegelung liegt vor, wenn $\det(A) = \begin{vmatrix}a_1 & 0\\a_2 & 1\end{vmatrix} = -1$ ist.

also für $a_1 = -1$. Ergebnis: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\a_2 & 1\end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Nach der Schrägspiegelung soll um 1 nach links verschoben werden, daher lautet die neue Abbildungsgleichung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\a_2 & 1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix}$

Die Zahl k ist notwendig, weil ja nichts darüber gesagt worden ist, um wieviel (also k) nach oben verschoben werden muss.

Damit wird $P(u\,|\,0)$ abgebildet in $\vec{x}' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\a_2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u-1\\a_2u+k\end{pmatrix}$.

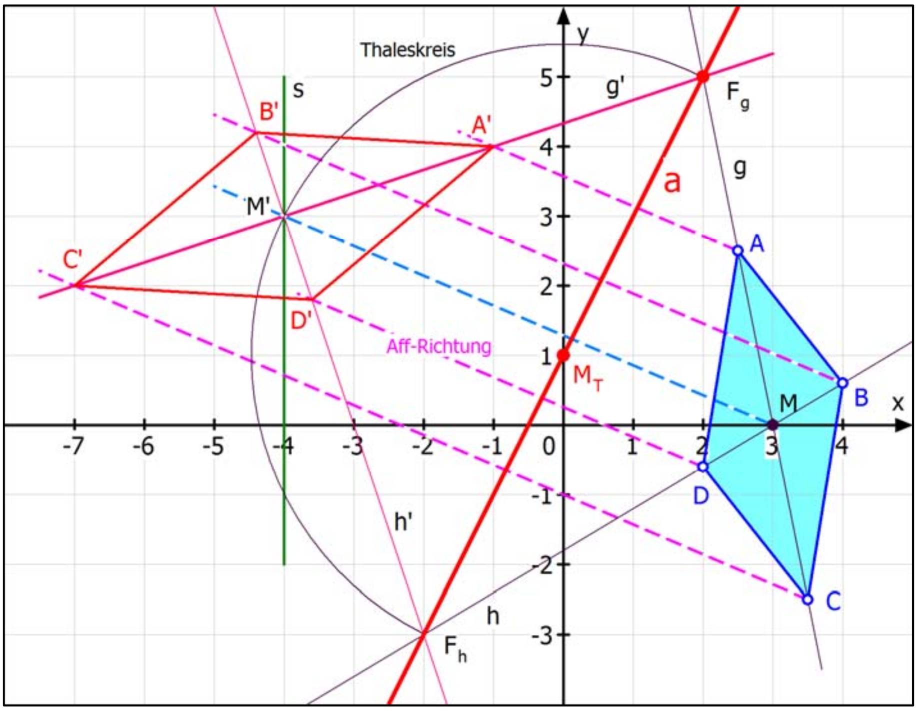
Vergleicht man das Ergebnis mit (*), dann erkennt man, dass $a_2 = 2t$ und $k = t$ sein muss.

Dann erhält man denselben Bildpunkt von $P(u\,|\,0)$.

b) Das Parallelogramm ABCD mit $A(2,5\,|\,2,5),\ B(4\,|\,0,6),\ C(3,5\,|\,-2,5),\ D(2\,|\,-0,6)$ und dem Mittelpunkt auf der x-Achse soll durch eine affine Abbildung $\alpha_{t_0} \in M$ so abgebildet werden, dass sein Bild eine Raute ist.

Konstruiere die Raute unter Verwendung der Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und beschreibe die wichtigsten Konstruktionsschritte. (Längeneinheit 1 cm).

Ausführliche Konstruktions-beschreibung:



Grundidee:
Bei einer Raute sind die Diagonalen orthogonal.

Also muss man so abbilden, dass bei M' ein rechter Winkel entsteht.

Da M Schnittpunkt der Diagonalen g = (AC) und h = (BD) ist. muss M' auf dem Schnitt von g' und h' liegen. Diese konstruiert man so:
g und h schneiden die Achse a in zwei Fixpunkten F_g und F_h. Über der Strecke F_gF_h zeichnet man einen Halbkreis. Auf ihm muss M' liegen, damit dort ein rechter Winkel entsteht.

Jetzt muss man der Aufgabe entnehmen, dass die Abbildung für Punkte der x-Achse auch durch eine Schrägspiegelung an der y-Achse mit nachfolgender Verschiebung um 1 nach links erzeugt werden kann. Führt man das mit M (bei x = 3) durch, dann erhält M' die x-Koordinate -4. Also muss M' auch auf der Geraden s: $x = -4$ liegen.

Diese Gerade k schneidet den Halbkreis (Thaleskreis) zweimal. Ich habe den oberen Schnittpunkt für M' gewählt.

Ab jetzt geht alles ganz schnell. Die Gerade (MM') legt die Affinitätsrichtung fest.
Also zeichnet man jetzt durch A, B, C und D je eine Gerade in Affinitätsrichtung. Diese schneiden dann g' bzw. h' in den gesuchten Bildpunkten.

Rechts meine Berechnung der Bildpunkte mit TI Nspire-CAS. Dies war nicht verlangt, ich habe Sie für eine genaue Zeichnung benötigt.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1. \\ 4. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -0.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3.6 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7. \\ 2. \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4.4 \\ 4.2 \end{bmatrix}$$

Anmerkung. Es würde reichen, so die Punkte A' und B' zu erzeugen. Diese könnte man dann an M' spiegeln (Kreisbogen um M') und würde dann C' und D' erhalten.

Bestimme die Abbildungsgleichungen von α_{t_0}.

Die vorliegende Abbildung ist gegeben durch $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$. Gesucht wird das spezielle t (genannt t_O), das aus dem Parallelogramm eine Raute erzeugt.

Also berechnet man zuerst die Vektoren, deren Bilder orthogonal werden sollen:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 2t-5+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7t-5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1{,}2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1{,}2 \\ -4t-1{,}2+1{,}2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -2{,}8t-1{,}2 \end{pmatrix}$$

(Zur Erinnerung: Für die Abbildung von Vektoren entfällt der Verschiebungsvektor).

Orthogonalitätsbedingung: $\vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0$

d. h. $\begin{pmatrix} -6 \\ 7t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -2{,}8t-1{,}2 \end{pmatrix} = -4{,}8 + (7t-5)(-2{,}8t-1{,}2) = 0$

Das führt auf

$$-19{,}6t^2 + 5{,}6t + 1{,}2 = 0 \qquad | \cdot 10$$
$$-196 \cdot t^2 + 56 \cdot t + 12 = 0 \qquad | : (-4)$$
$$49\,t^2 - 14t - 3 = 0$$
$$t_O = \frac{14 \pm \sqrt{196+588}}{98} = \frac{14 \pm 28}{98} = \begin{cases} \frac{42}{94} = \frac{3}{7} \\ -\frac{14}{98} = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Diese beiden Parameterwerte sind möglich. Für $t_O = \frac{3}{7}$ lautet dann die Abbildungsgleichung:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

c) Eine Abbildung $\alpha_{t^*} \in M$ bildet die Geraden mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$ auf Bildgeraden mit der Steigung $m' = 5$ ab. Wie heißen die Gleichungen von α_{t^*}?

Ich erzeuge zu $m = \frac{1}{2}$ einen Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und bilde ihn ab:

$$\vec{w}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 4t+1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3t+1 \end{pmatrix}$$

Damit die Bildgerade die Steigung 5 hat, muss $\vec{w}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3t+1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sein.

Also muss gelten: $\begin{Bmatrix} -1 = k \\ 3t+1 = 5k \end{Bmatrix}$

Man erhält k = -1 und $3t+1 = -5 \;\Leftrightarrow\; 3t = -6 \;\Leftrightarrow\; t^* = -2$

Abbildungsgleichung: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zeige, dass α_{t^*} eine Scherung ist.

Eine Scherung liegt dann vor, wenn die Abbildung eine Achse hat und ihre Determinante den Wert 1. Alle Abbildungen der gegebenen Menge M haben die Achse $y = 2x + 1$ (Teil a).

Für die Determinante gilt: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$, was zu zeigen war.

d) Zeige: $\alpha_{t_1} \circ \alpha_{t_2}$ ist genau dann eine Achsenaffinität, wenn gilt: $t_1 + t_2 + t_1 t_2 + 1 \neq 0$

Wenn man nicht weiß, wie man anfangen soll, dann könnte man hinterfragen, was eigentlich passiert, wenn dieser seltsame Term doch Null wird?

Man kann z. B. (*) $\mathbf{t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 + 1 = 0}$ | $-t_1 - 1$

nach t_2 umstellen: $t_1 t_2 + t_2 = -t_1 - 1$

Eine gute Idee ist ausklammern: $t_2(t_1 + 1) = -(t_1 + 1)$

Nun ist man versucht, durch die Klammer $(t_1 + 1)$ zu dividieren, dazu muss man aber aufpassen, dass man nicht durch Null dividiert. Dazu muss man die Aufgabenstellung ansehen und entdecken, dass dort angegeben ist: $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, also ist gesichert, dass $t \neq -1$ ist, also $(t + 1) \neq 0$.

Nun kann man also doch durch diese Klammer dividieren und erhält: $t_2 = -1$.

Upps! Das war doch gerade verboten. Also darf $\mathbf{t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 + 1}$ nicht Null werden, sonst hätte man durch die Verkettung der beiden Abbildungen keine Abbildung unseres Typs erhalten.

Günstiger ist folgende Umformung: $\mathbf{t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 + 1 = 0}$

$$(t_1 \cdot t_2 + t_2) + (t_1 + 1) = 0$$

$$t_2 \cdot (t_1 + 1) + (t_1 + 1) = 0$$

Nun die Klammer ausklammern: $[t_2 + 1](t_1 + 1) = 0$

Jetzt erkennt man, dass gilt. $\mathbf{t_1 \cdot t_2 + t_1 + t_2 + 1 = (t_1 + 1)(t_2 + 1)}$

Die gegebene Voraussetzung $t_1 + t_2 + t_1 t_2 + 1 \neq 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $t_1 \neq -1$ **und** $t_2 \neq -1$ ist, wenn also beide Abbildungen regulär sind.

Und jetzt ist doch alles klar – oder ?

Laut Aufgabenteil a) (Seite 39) hat jede dieser Abbildungen die Fixpunktgerade $\mathbf{y = 2x + 1}$, ist also eine Achsenaffinität. Nun werden zwei solche Abbildungen verkettet. Was passiert dabei?

Bei α_{t_2} bleiben alle Punkte dieser Achse fest, ebenso bei α_{t_1}, also insgesamt auch bei der verketteten Abbildung $\alpha_{t_1} \circ \alpha_{t_2}$. Allerdings nur, wenn für beide Abbildungen gilt $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, und das bedeutet, wie oben gezeigt, $t_1 + t_2 + t_1 t_2 + 1 \neq 0$.

Im Grunde ist diese so schwer erscheinende Aufgabe richtig banal. Denn es geht nur darum, dass die verkettete Abbildung eben nur dann eine Achse haben kann, wenn die beteiligten Abbildungen α_{t_1} und α_{t_2} regulär sind, also die Bedingung $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ erfüllen.

Noch ein Hinweis für den lernenden Leser.

Man sollte sich erinnern, dass bei der Definition von affinen Abbildungen eine Bedingung vorhanden ist, die schnell vergessen wird. Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ müssen linear unabhängig sein, was man z. B. dadurch nachweist, dass man zeigt, dass die Determinante der Abbildungsmatrix ungleich Null ist: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2t & 1-t \end{vmatrix} = -(1-t) - 2t = -1 + t - 2t = -1 - t$.

Wäre det(A) = 0, dann wäre $t = -1$. Damit also die Abbildung eindeutig und umkehrbar ist, also eine affine Abbildung ist, muss $t \neq -1$ sein.